DIGITALER FILTER ZWEITER ORDNUNG

März 1993, W.-W.Scheuermann, H.Stoltenberg

Wir betrachten zuerst das allgemeine schwingungsfähige System mit Dämpfung, welches durch folgende homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben wird:

$$\boxed{m.\frac{d^2y}{dt^2} + r.\frac{dy}{dt} + D.y = 0} \tag{1}$$

Dabei bedeuten physikalisch die Parameter

m	Masse in kg
D	Federkonstante in $\frac{N}{m}$
r	Dämpfung in $\frac{kg}{s}$.

Für die numerische Lösung der Gl.(1) müssen die Differentiale d durch Differenzen Đ ersetzt werden. Dies geschieht auf folgende Weise:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} \to \frac{Đy}{Đt} = \frac{y_{i+1} - y_i}{Đt}} \tag{2}$$

Đt ist ein fest vorgegebenes, möglichst kleines Zeitinkrement in sec.

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} \to \frac{Đ\left(\frac{Đy}{Đt}\right)}{Đt} = \frac{ĐĐy}{(Đt)^2}} \tag{3}$$

Dabei ist

$$\boxed{ĐĐy = Đ(y_{i+1} - y_i) = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i} \tag{4}$$

Folglich ergibt sich aus Gl.(4) eingesetzt in Gl.(3):

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} \to \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{Đt^2}} \tag{5}$$

Mit Gl.(5) und Gl.(2) erhält man aus Gl.(1):

$$m.\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{\text{Ð}t^2} + r.\frac{y_{i+1} - y_i}{\text{Ð}t} + D.y_i = 0 \qquad (6)$$

Tritt eine äußere Störung y_{in} auf, so wird aus Gl.(6) unter Berücksichtigung der Einheiten:

$$m.\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{\text{Ð}t^2} + r.\frac{y_{i+1} - y_i}{\text{Ð}t} + D.y_i = D.y_{in} \qquad (7)$$

Gl.(7) aufgelöst nach y_{i+2} ergibt den Iterations-Algorithmus:

$$y_{i+2} = -\frac{1}{m}.(\text{Ð}t^2.D.(y_i - y_{in}) + \text{Ð}t.r.(y_{i+1} - y_i) + m.(y_i - 2y_{i+1})) \qquad (8)$$

Die digitale Simulation sieht dann folgendermaßen aus:

```
WHILE t < T
   y2 = -(dt^2*D*(y0-yin)+dt*r*(y1-y0)+m*(y0-2*y1))/m
   t  = t + dt
   y0 = y1
   y1 = y2
WEND
```

Durch Vorbesetzung der Systemparameter lassen sich die verschiedenen Schwingungsfälle erzeugen:

$r = 0$ Schwingung ohne Dämpfung mit der Periode:

$$omega = 2pi.sqr\frac{m}{D} \qquad (9)$$

$r < sqr(4mD)$ Gedämpfte Schwingung. Die erwartete Frequenzverschiebung ist beobachtbar.

$r = sqr(4mD)$ Aperiodischer Grenzfall. Verwendbar als digitaler Filter: die Sprungantwort ist eine S-förmige (sigmoidale) Kurve. Tiefe Frequenzen passieren ungehindert, hohe Frequenzen werden in ihrer Amplitude gedämpft.

$r > sqr(4mD)$ Aperiodischer Kriechfall. Die Vorgabe y_{in} wird nie erreicht.

Der digitale Filter reagiert auf verschiedene Eingangsfunktionen im aperiodischen Grenzfall mit charakteristischen Antworten: Ein Sprung wird mit glatten Übergängen beantwortet, auf Schwingungen reagiert der Filter als Tiefpass.

Die Antwort des Filters schleppt, abhängig von der Glättung, immer etwas nach.