Knoten v2.0

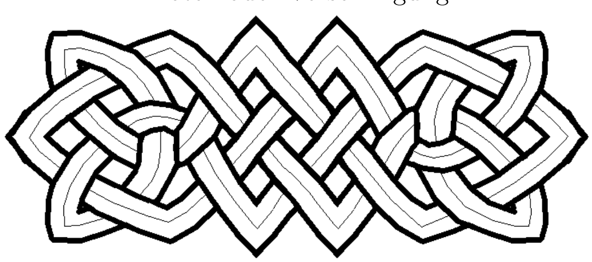
Dipl.-Ing.(FH) Kapt.(AG) Wolf Scheuermann

Toppsegelschoner "Albatros", DEQZ 2012-2014

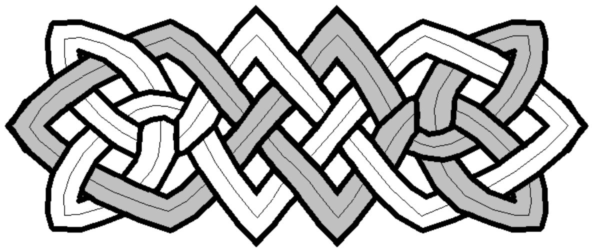
Abstract

Dieses Dokument behandelt den Versuch mathematische Knoten, die aus einer einzigen in sich geschlossenen Part gebildet werden und Verschlingungen, die aus zwei oder mehr Parten gebildet werden zu unterscheiden. Statt der üblichen ebenen Knotendiagramme werden Knotengraphen ("Knotenschatten") verwendet. Es werden Operationen zur Erweiterung und Reduzierung von Knotengraphen angegeben, sowie Äquivalenzoperationen zur Transformation eines Knotengraphen in einen gleichwertigen anderen. Es werden Regeln und Methoden zur Erkennung von Verschlingungen in Knotengraphen angegeben. Es wird versucht eine Ordnung in das verknotete Problem zu bringen. Zuletzt wird als Materialsammlung die vollständige Knotentabelle für Knoten und Verschlingungen mit bis zu sieben Kreuzungen erzeugt.

Knoten oder Verschlingung?



Verschlingung!



Contents

1 Einleitung

Knoten gehören zum Alltag des Seemanns. Hier geht es jedoch nicht darum neue Gebrauchsknoten zu entdecken, sondern darum auf möglichst einfache und systematische Weise alle mathematischen Knoten (abgesehen von Mehrdeutigkeit) bis zu einer gewissen Kreuzungszahl zu erzeugen. Die hier vorgestellte Methode basiert auf der Beobachtung, dass Knotendiagramme offenbar nicht in der Graphentheorie behandelt werden, bzw. zu trivial oder eintönig sind um mit graphentheoretischen Mitteln etwas zur Klassifikation beitragen zu können. Versuche aus der Adjazenzmatrix der Knotengraphen Unterschiede herauszulesen scheiterten, da z.B. die minimale Adjazenzmatrix immer die Hauptdiagonale mit Nullen besetzt hat (Eine Kreuzung ist nie mit sich selbst verbunden, da dieses Auge leicht ausgetörnt werden kann und der entsprechende Knoten um eine Kreuzung reduzierbar ist).

Zuerst werden Knotengraphen definiert und Operationen auf den Knotengraphen zur äquivalenten Umformung, zur Erweiterung und zur Reduktion beschrieben. Mit den Erweiterungsoperationen werden neue Knotengraphen mit höherer Kreuzungszahl erzeugt, die allerdings auch Verschlingungen darstellen können. Durch Äquivalenzumformungen werden Varianten von Knotengraphen eines Knotens erkannt und durch die Reduktionsmethode wird schliesslich erkannt, ob ein Knotengraph tatsächlich einen Knoten oder eine Verschlingung darstellt. Es wird angestrebt, mit minimaler, aber vollständiger Anzahl von Regeln zu arbeiten, sozusagen einem Axiomensystem für Knotenoperationen.

Da manche Knoten nur aus Verschlingungen niedrigerer Kreuzungzahl zu erzeugen sind, werden Knotentabellen erstellt, die auch diejenigen Graphen von Knoten und Verschlingungen enthalten, die zur Erzeugung aller Knoten nötig sind.

Diese Arbeit ist in erster Linie Materialsammlung. Es werden keine Beweise für die Richtigkeit der Methoden gegeben, noch wird die Vollständigkeit der Regeln sichergestellt. Dies bleibt späteren Arbeiten überlassen.

Es wird an einer formalen Terminologie für Knotengraphen gearbeitet, die sich die Nomenklatur organischer chemischer Moleküle zum Vorbild nimmt.

2 Anmerkung

Während des Schreibens dieser Arbeit entwickelte sich der Schwerpunkt der Problemstellung immer mehr vom reinen Unterscheiden zwischen Knoten und Verschlingungen hin zu Herleitungs-, Strukturierungs- und Klassifikationsproblemen.

Die Hoffnung, daß sich ein Erzeugungsmuster zeigt, welches eine systematische Anordnung der Knotengraphen erlaubt und somit eine Klassifikation darstellt, wenn die Knoten anhand ihrer Position in der Knotentabelle bestimmt werden können, hat sich zerschlagen, da die Varianten der Knotengraphen eines Knotens keinem durchgehenden Muster gehorchen.

Dafür haben sich durch die Definition der Erweiterungs- und Reduktionsoperationen neue Möglichkeiten der Srukturierung und Klassifikation eröffnet.

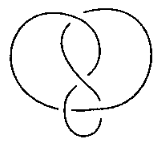
Durch den selbstgewählten Horizont mit Knoten mit nur sieben Kreuzungen war in der ersten Version dieser Arbeit das Problem des türkischen Bundes und ähnlicher Knotengraphen nicht sichtbar, da es sich hier um Knotengraphen mit acht oder mehr Kreuzungen ohne Zweiecke handelt. Die Erweiterungsregeln waren zur Lösung des Problems nicht ausreichend. Es gibt zwar eine Verschlingung ohne Zweiecke mit nur sechs Kreuzungen, da sie mit den dann vorhandenen Regeln aber nicht erzeugt werden konnte blieb das Problem unentdeckt.

Dieses Herleitungsproblem und das damit verbundene Reduktionsproblem ist mit dieser Version der Arbeit gelöst.

3 Knotendiagramme und Knotengraphen

Statt der üblichen ebenen Knotendiagramme werden Knotengraphen (auch "Knoten-schatten" genannt) verwendet:

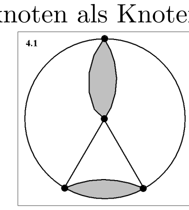
Achtknoten als Knotendiagramm:



4_1

Da alle Knotendiagramme geschlossene Raumkurven darstellen, lassen sich Knotengraphen immer in einem Kreis darstellen. Kreuzungen werden durch Punkte dargestellt:

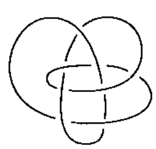
Achtknoten als Knotengraph:



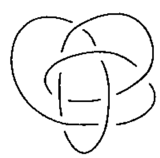
Es existieren Mehrdeutigkeiten von Knotengraphen, die im Moment jedoch zweitrangig sind, denn es geht vorrangig um die Unterscheidung von Knoten und Verschlingungen anhand von Knotengraphen und das Erkennen desselben Knotens in verschiedenen Knotengraphen.

Palstek-Varianten und Schotstek...

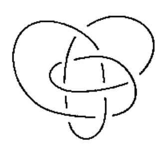
8_{17}



8_{19}

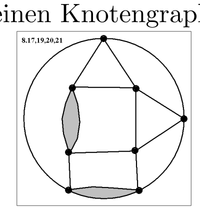


8_{20}



8_{21}

...werden auf einen Knotengraphen abgebildet:

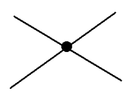


3.1 Definitionen

Folgende Begriffe werden für Teile des Knotengraphen verwendet:

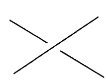
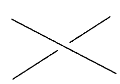
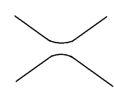
Definition: **Part** statt graphentheoretisch "Kante":

Definition: **Kreuzung** statt graphentheoretisch "Knoten":



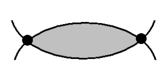
Von jeder Kreuzung gehen genau vier Parten ab. Allerdings ist keine Kreuzung mit sich selbst durch eine Part verbunden, da durch einfaches Austtörnen diese Kreuzung aufgelöst werden kann.

Wegen der Mehrdeutigkeit der Kreuzungen im Knotendiagramm sind Knotengraphen mehrdeutig. Eine Kreuzung kann im Knotendiagramm auf zwei Arten dargestellt sein:

So  oder so  aber nie so 

Jeder Knotengraph kann in ein Knotendiagramm umgezeichnet werden, wenn man die Parten verfolgt und an jeder Kreuzung alternierend über- oder unterführt. Für manche Knoten gibt es allerdings auch nichtalternierende Lösungen, z.B. K8.19.

Definition: Wenn zwei Kreuzungen zwei gemeinsame Parten haben entsteht ein **Zweieck**:

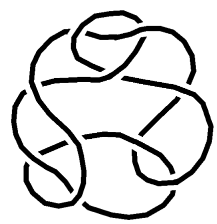


Definition: Eine **Wuling** ist kein Knoten und keine Verschlingung, sondern kann in den Nullknoten entwirrt werden. Es ist sozusagen eine zweidimensionale Verknotung des Nullknotens, wogegen ein echter Knoten immer dreidimensional verknotet ist.

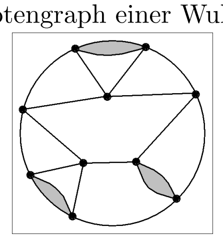
Der dazugehörende Knotengraph kann wegen der Mehrdeutigkeit allerdings auch zu einem echten Knoten mit höherer Kreuzungszahl umgezeichnet werden.

Beispiel:

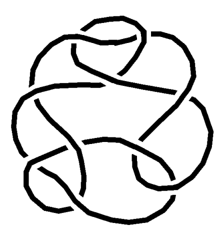
Wuling:



Knotengraph einer Wuling:



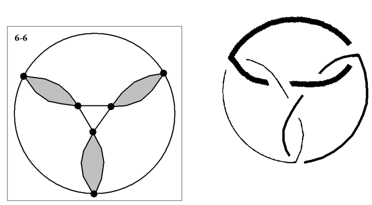
Knoten aus Knotengraph einer Wuling:



3.2 Beobachtungen

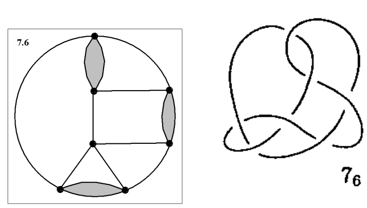
- Knotengraphen haben den Vorteil, dass leichter Strukturen und Ähnlichkeiten zu entdecken sind als bei den etwas chaotischen Knotendiagrammen.
- Es existieren für verschiedene Knoten dieselben Knotengraphen, da die Laufrichtung der Kreuzungen nicht erfasst wird (Beispiel: Knoten 8.17, 8.19). Für die Problemstellung ist dies allerdings nicht ausschlaggebend, da es erst nur darum geht Knoten von Verschlingungen zu unterscheiden.
- Ein Knotengraph hat nur Kreuzungen vom geraden Grad 4, da von jeder Kreuzung exakt vier Parten ausgehen (genau genommen wird eine Kreuzung durch zwei übereinanderlaufende Parten gebildet).
- Es kann einen Eulerkreis im Knotengraphen geben, der dann einen Knoten darstellt.
- Obwohl der Knotengraph zusammenhängend aussieht und seine Kreuzungen geraden Grad haben, kann er geschlossen unikursal oder geschlossen multikursal sein. Im zweiten Fall stellt der Knotengraph eine Verschlingung dar.
- Gibt es für Teilmengen der Kreuzungen Teil-Eulerkreise (die dann genaugenommen keine mehr sind), so handelt es sich um eine Verschlingung.
- **Definition:** Grad der Verschlingung: Anzahl der Teil-Eulerkreise.

Verschlingung vom Grad 3:



- Existiert genau ein geschlossener Eulerweg (Eulerkreis), so handelt es sich um einen Knoten. Ein Knoten ist sozusagen eine Verschlingung vom 1. Grade.

Knoten Nr. 7.6:

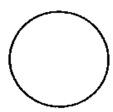


4 Operationen

Hier wird beschrieben, wie durch zwei Erweiterungsoperationen aus einem Knotengraph neue Knotengraphen mit einer erhöhten Kreuzungszahl erzeugt werden können. Dabei können sowohl Graphen von Knoten wie auch von Verschlingungen entstehen. Durch Äquivalenzoperationen kann erkannt werden, welche Graphen denselben Knoten bzw. dieselbe Verschlingung darstellen.

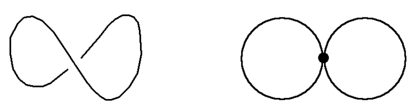
Mit den in diesem Kapitel vorgestellten Operationen kann noch nicht zwischen Knoten und Verschlingungen unterschieden werden.

Ausgangspunkt aller Erweiterungen ist der **Unknoten**, ein Knoten ohne Kreuzung:



0_1

Durch **Verdrehen** entsteht daraus ein (reduzierbarer) Knoten mit einer Kreuzung:



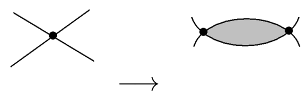
=

Dieser Knoten kann auch mittels der Teilungsregel erzeugt werden (siehe unten Kap. 4.1.3).

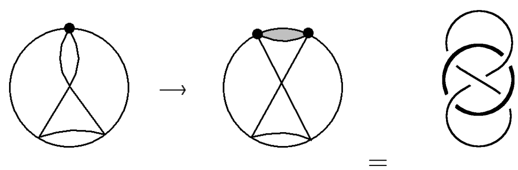
4.1 Erweiterungen

Zur Erzeugung neuer Knotengraphen mit höherer Kreuzungszahl wird eine Kreuzung auf zwei Arten zu einem Zweieck **erweitert** oder **expandiert**: Eine Kreuzung kann in ein Zweieck aufgespalten werden und zwar "längs" oder "quer". Die dritte Art der Expansion ist die Teilung von Parten durch neue Kreuzungen. Der erzeugte Knotengraph kann einen Knoten oder eine Verschlingung darstellen, unabhängig davon, ob der Vorgänger ein Knoten oder eine Verschlingung war.

4.1.1 ”längs”

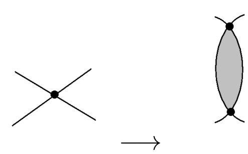


Beispiel:

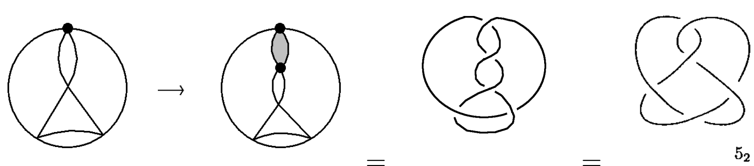


Dadurch wird aus dem Achtknoten eine Verschlingung zweiten Grades.

4.1.2 ”quer”



Beispiel:



Dadurch wird der Achtknoten in den Knoten 5.2 der herkömmlichen Tabellen expandiert.

4.1.3 "Teilung"

Die Parten eines Knotengraphen können nach folgenden Regeln durch neue Kreuzungspunkte "geteilt" und der Knotengraph damit erweitert werden:

1. "Teilung" einer Part durch Einfügen einer neuen Kreuzung.

2. Jede existierende Part darf nur ein einziges Mal geteilt werden. Es darf also nur genau eine Kreuzung pro Part eingefügt werden.

3. Die neuen Kreuzungen werden mit neuen Parten verbunden so daß...

3.1. ... von allen Kreuzungen genau vier Parten abgehen und ...

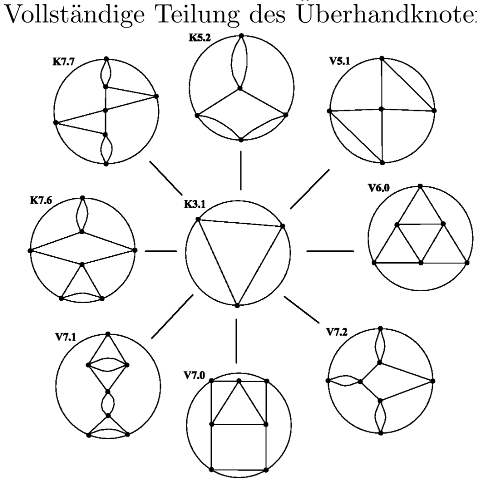
3.2. ... keine neue Part existierende Parten kreuzt (das würde Regel 2. widersprechen).

4. Es können beliebig viele von den maximal möglichen neuen Kreuzungen eingefügt werden.

5. Nur nichtreduzierbare Knoten mit Ausnahme des Knotens K1.1 dürfen geteilt werden!

Beispiel:

Vollständige Teilung des Überhandknotens



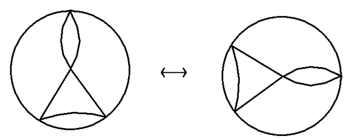
Mit diesen Regeln können auch Knotengraphen ohne Zweiecke, wie z.B. V6.0, erzeugt werden.

4.2 Äquivalenzoperationen

Äquivalenzoperationen lassen den Knoten unverändert, transformieren jedoch den Knotengraphen in einen anderen, gleichwertigen. Insbesondere bleibt die Kreuzungszahl erhalten. Diese Operationen orientieren sich an den Möglichkeiten, echte Knoten umzuformen (siehe Kap. 8.7).

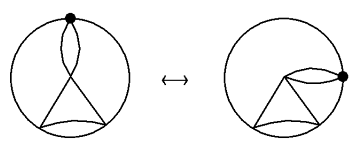
4.2.1 Rotation

Drehung des gesamten Knotengraphen um einen festen, aber beliebigen Winkel, z.B.:



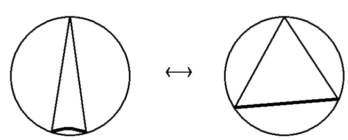
4.2.2 Verschiebung

Verschiebung von Kreuzungspunkten auf den Parten, z.B.:



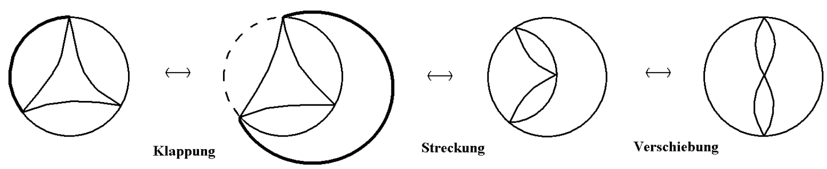
4.2.3 Streckung

Streckung (Verlängerung oder Verkürzung) von Parten, z.B.:



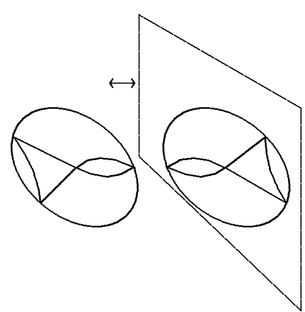
4.2.4 Klappung

Klappung einer Part am Rand des Knotengraphen um den gesamten Graphen herum, z.B.:



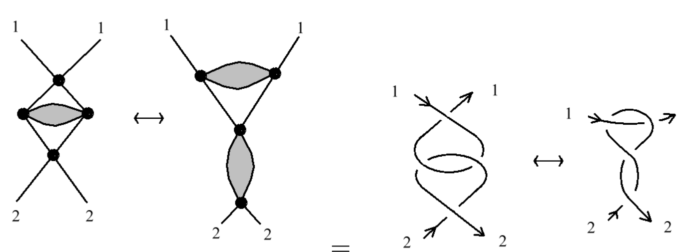
4.2.5 Spiegelung

Spiegelung des gesamten Knotengraphen, z.B.:



4.2.6 Törnen

Törnen (Verdrehen) von Teilen den Knotengraphen unter Beibehaltung der Kreuzungszahl und der Laufrichtung der Parten:



Die wichtigsten Äquivalenzoperationen sind Klappung und Törnen.

5 Erkennung von Verschlingungen

Es gibt zwei Methoden zur Erkennen von Verschlingungen in Knotengraphen:

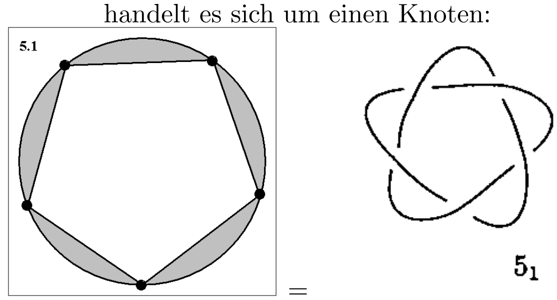
1. Spezielle Muster, die als Merkmale für Verschlingungen dienen.
2. Erkennen der vorgenannten Merkmale nach Reduktion der Kreuzungszahl, ohne Änderung des Verlaufs der Parten. D.h. Vereinfachung des Knotengraphen ohne Aufgabe von wesentlichen Eigenschaften und Zurückführung auf bekannte Knoten oder Verschlingungen.

Alle Knotengraphen, die keine Verschlingungen darstellen sind, ggf. bis auf Äquivalenz, Knoten.

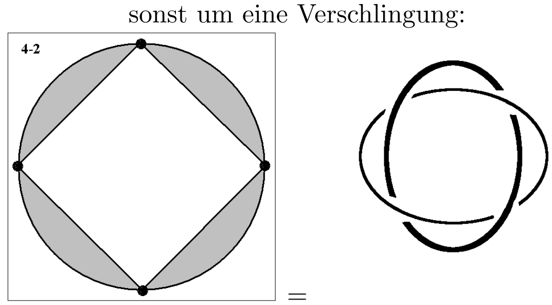
5.1 Merkmale von Verschlingungen

Das erste topologische Muster ist sehr leicht zu erkennen, wenn es sich um geschlossene Ketten von Zweiecken handelt:

Wenn die Anzahl der Zweiecke in der geschlossenen Kette ungerade ist, handelt es sich um einen Knoten:



sonst um eine Verschlingung:

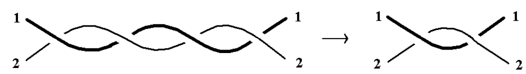


5.2 Reduktionsmethode

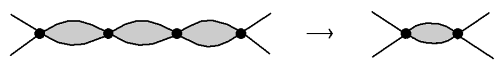
Folgende gegenübergestellte Sequenzen haben denselben Verlauf der Parten, jedoch weniger Kreuzungen. Dadurch sind sie zur Reduktion von Knotengraphen geeignet.

5.2.1 Drei Zweiecke auf eines reduzieren

Eine Kette von drei Zweiecken kann auf ein Zweieck reduziert werden, also vier Kreuzungen reduzieren sich auf zwei:

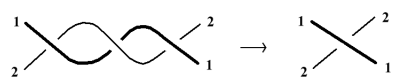


bzw.

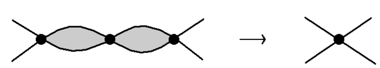


5.2.2 Zwei Zweiecke zur Kreuzung reduzieren

Zwei Zweiecke können auf eine Kreuzung reduziert werden, also drei Kreuzungen reduzieren sich auf eine:

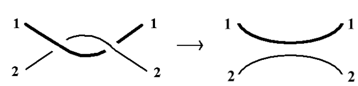


bzw.

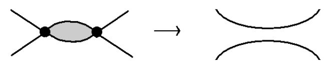


5.2.3 Auflösung eines Zweiecks

Ein Zweieck kann aufgelöst werden:

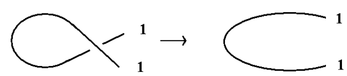


bzw.

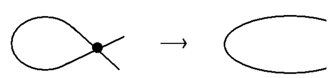


5.2.4 Austörnen eines Auges

Ein Auge (eine Kreuzung, zu der im Verlauf der Reduktionen eine Part zurückführt) kann ausgetörnt werden;

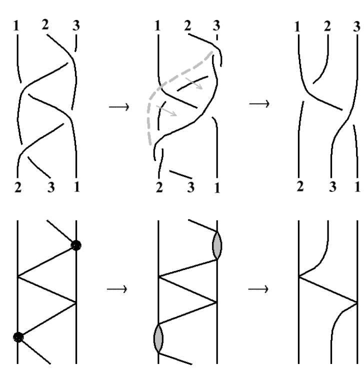


bzw.



5.2.5 Reduktion nach Erweiterung

Für Knotengraphen ohne Zweiecke, wie z.B. dem türkischen Bund, bedarf es einer eigenen Reduktionsregel: Durch Überschlag einer Part werden vorübergehend mehr Kreuzungen, aber auch Zweiecke erzeugt, die danach reduziert werden können.

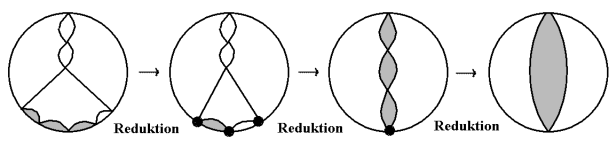


Wenn Knotengraphen mit den obigen Regeln auf eine kleinere Kreuzungszahl reduziert werden können, evtl. unter Anwendung von Äquivalenzoperationen, dann lassen sich ggf. topologische Muster und der Grad von Verschlingungen erkennen, bzw. die Reduktion schreitet solange voran, bis ein elementarer Knoten mit niedriger Kreuzungszahl erkannt wird.

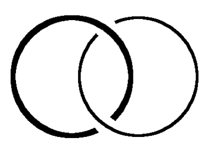
Da sich der Verlauf der Parten im Knoten nicht prinzipiell durch die Reduktion verändert, kann letzlich die topologische Eigenschaft des reduzierten Knotens auf den komplizierten übertragen werden.

5.2.6 Beispiele

An folgenden Beispielen soll die Methode gezeigt werden:

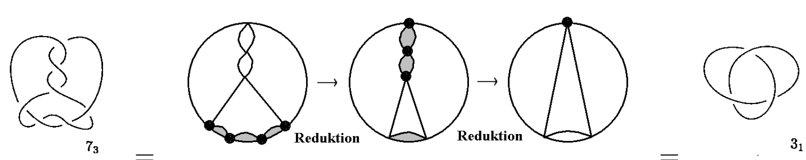


Die Reduktion führt auf den Graphen der einfachsten Verschlingung

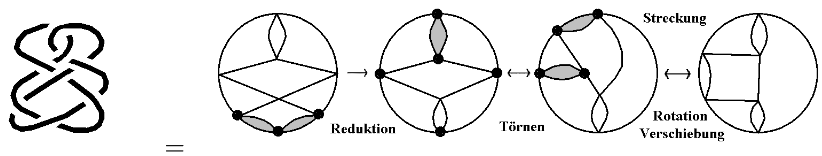


und somit stellt auch der Ausgangsgraph eine Verschlingung dar.

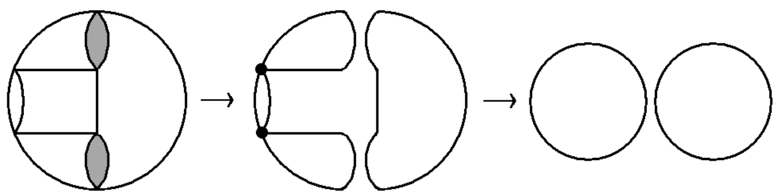
Die folgende Reduktion führt auf den Überhandknoten, so dass hier der Ausgangsgraph einen Knoten darstellt:



Das folgende Beispiel zeigt eine komplexere Reduktion mit Törnen und verschieben:

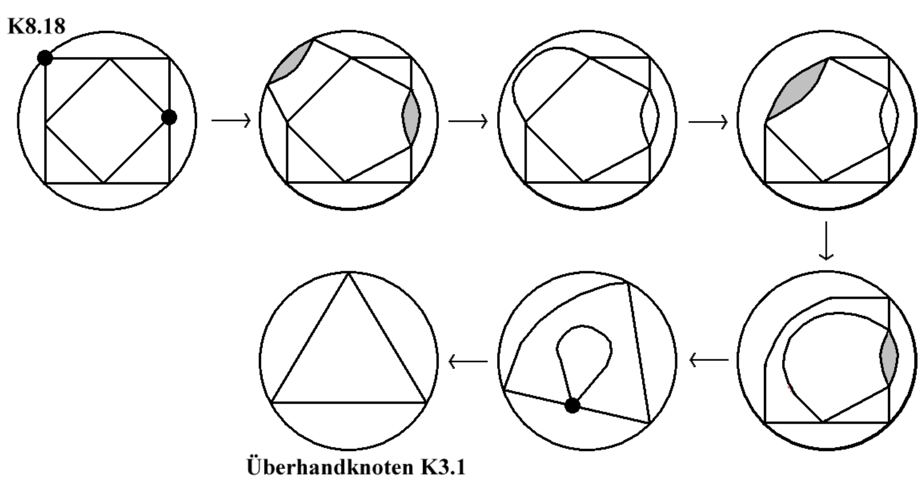


In dem letzten Graphen ist in der rechten Hälfte das topologische Muster einer Verschlingung zu erkennen:

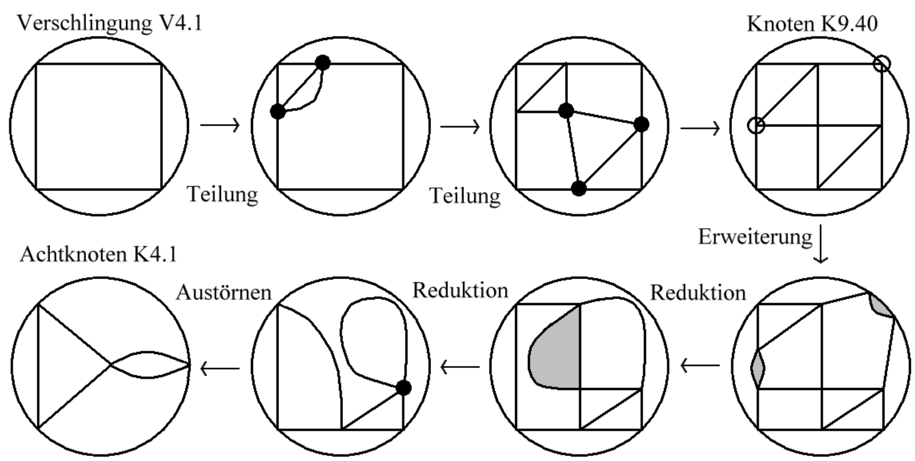


Die Reduktion führt auf eine Verschlingung 2. Grades. Daher handelt es sich beim Ausgangsgraphen ebenfalls um eine Verschlingung 2. Grades.

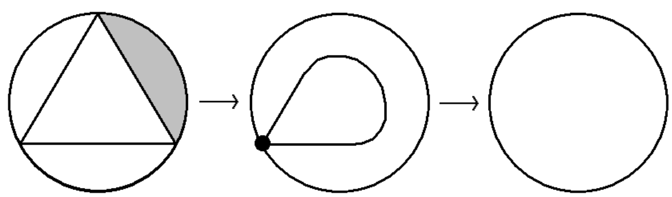
Der türkische Bund (Knoten K8.18) reduziert sich auf den Überhandknoten:



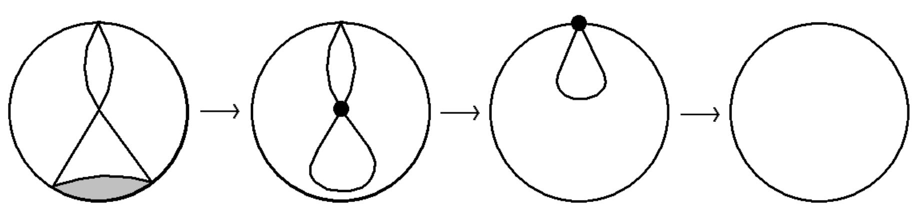
Und als ein weiteres Beispiel der Reduktion durch Erweiterung soll gezeigt werden, daß sich der Knoten K9.40 auf den Achtknoten reduziert:



Der Überhandknoten reduziert sich direkt auf den Nullknoten:



Der Achtknoten reduziert sich ebenfalls direkt auf den Nullknoten:



6 Versuch einer Nomenklatur

Vorbild dieser Nomenklatur zur Beschreibung von Knotengraphen ist die Nomenklatur zur Beschreibung komplexer organischer chemischer Verbindungen.

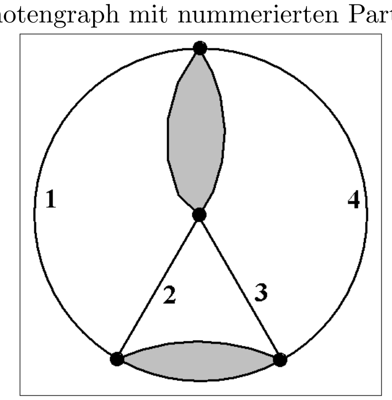
Da Knotengraphen wesentlich weniger Elemente enthalten als es chemische Elemente gibt (nur drei: Kreuzungen, Parten, Zweiecke) und die Zahl der Verbindungen überschaubar ist (exakt vier Parten verlassen jede Kreuzung) sollte es leicht möglich sein, einfache strukturbeschreibende Nomenklatur-Regeln zu finden, die in Knotengraphen übersetzt werden können und vice versa.

Die Regeln der Nomenklatur sollten zum einen die Struktur des Knotengraphen beschreiben, zum anderen sollte es leicht möglich sein, Umformungen und Operationen auch formal vorzunehmen. Wenn dann die Strukturformel auch noch gestattet, topologische Muster zu erkennen, ist das Regelwerk perfekt. Gegebenenfalls lassen sich algebraische Strukturen (Gruppen, Ringe, Verbände, etc.) erkennen und weitere Eigenschaften daraus ableiten.

6.1 Elemente

Wenn ein Knotengraph in eine Strukturformel übersetzt werden soll, so werden zuerst (willkürlich) die Parten nummeriert. Kreuzungen werden mit K bezeichnet und Zweiecke mit Z.

Knotengraph mit nummerierten Parten:



Dieser Knotengraph enthält zwei Zweiecke von deren Ecken jeweils zwei Parten abgehen. Die Beschreibung des einen Zweiecks sieht folgendermaßen aus:

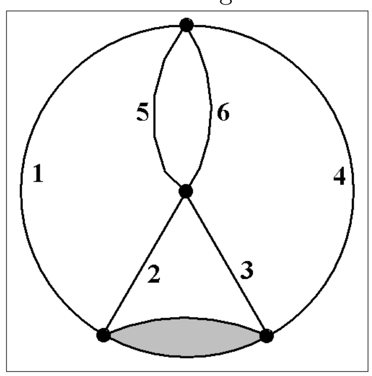
1 2 Z 3 4

die des anderen:

1 4 Z 2 3

Nun kann ein Zweieck auch als zwei Kreuzungen, verbunden durch zwei Parten dargestellt werden:

Alternative Darstellung eines Zweiecks:



Der Knotengraph enthält nun zwei Kreuzungen K, von denen eine samt ihren Parten durch

1 5 K 6 4
die andere durch

2 3 K 5 6
beschrieben wird.

Da die Nummerierung der Parten willkürlich ist und keine Orientierung bei Kreuzungen gegeben ist gibt es mehrere Varianten wie eine Kreuzung beschrieben werden kann:
a b K c d
b a K c d
a b K d c
b a K d c
a c K b d
c a K b d
a c K d b
etc.

Die Beschreibung des Knotengraphen ist eine beliebige Aneinanderreihung der Beschreibungen der Kreuzungen und Zweiecke und ihrer Parten und kann also auch folgendermassen geschrieben werden:

1 5 K 4 6 2 3 K 5 6 1 2 Z 3 4 = 1 4 Z 2 3 1 2 Z 3 4

Die Beschreibung kann problemlos eindeutig (bis auf Äquivalenz) in einen Knotengraphen rückübersetzt werden.

6.2 Operationen

Die Erweiterung einer Kreuzung "längs" in ein Zweieck sieht in der Strukturbeschreibung folgendermassen aus:

a b K c d → a b Z c d.

Die Erweiterung einer Kreuzung "quer" in ein Zweieck hat diese Strukturbeschreibung:

a b K c d → a c Z b d.

Bei Zweiecken gibt es nur die Beschreibungsvarianten

a b Z...

b a Z...

und entsprechend am anderen Ende.

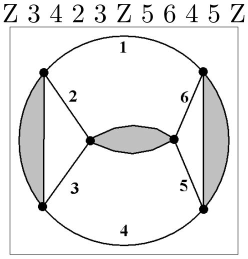
Zweieckketten werden durch ZZ... dargestellt.

Es gibt also zahlreiche Beschreibungen eines Knotengraphen, die jedoch alle eindeutig die Struktur wiedergeben.

6.3 Beispiele

Ausgangsverschlingung:

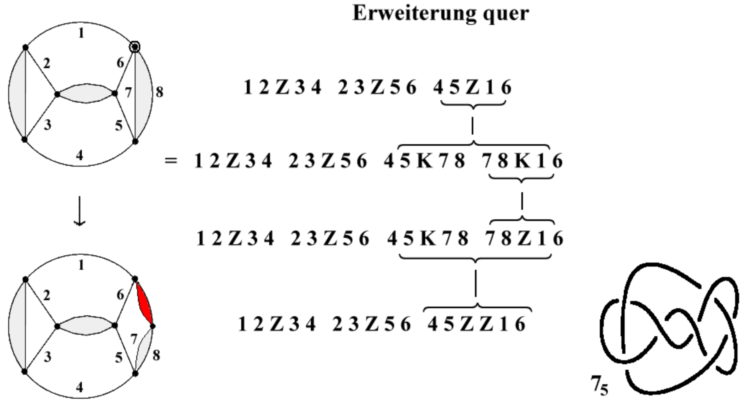
1 2 Z 3 4 2 3 Z 5 6 4 5 Z 1 6



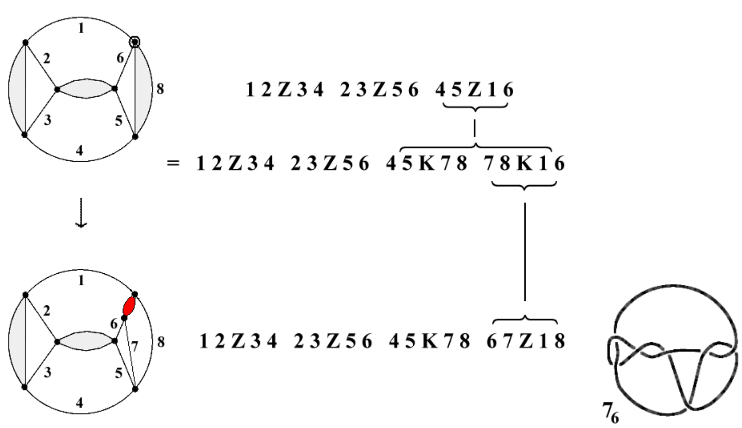
Diese Verschlingung besteht aus

1. einem Zweieck von dem auf der einen Seite die Parten 1 und 2 und von der anderen die Parten und 3 und 4 ausgehen (1 2 Z 3 4),
2. einem Zweieck von dem auf der einen Seite die Parten 2 und 3 und von der anderen die Parten und 5 und 6 ausgehen (2 3 Z 5 6) und
3. einem Zweieck von dem auf der einen Seite die Parten 4 und 5 und von der anderen die Parten 1 und 6 ausgehen (4 5 Z 1 6).

Erweiterung quer

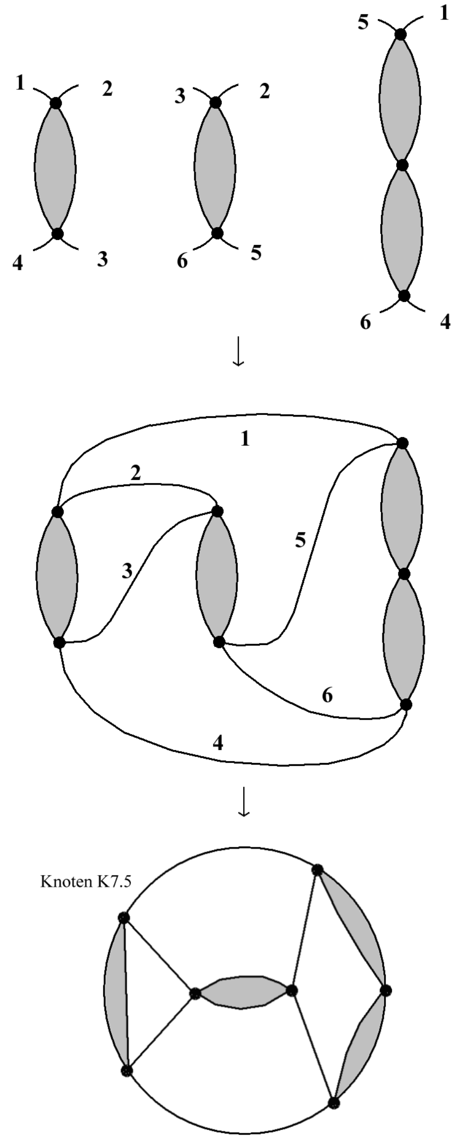


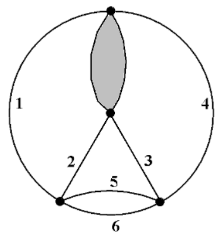
Erweiterung längs



Zeichnerische Rekonstruktion

1 2 Z 3 4	2 3 Z 5 6	1 5 Z Z 4 6

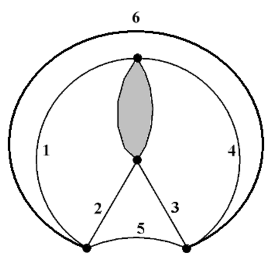




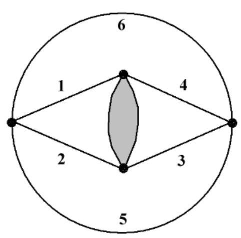
$$14Z23 \quad 12Z34$$

$$= \ 14Z23 \quad \overbrace{12K56 \quad 56K34}$$

↓ **Klappung**



↓



$$14Z23 \quad 12K56 \quad 56K34$$

7 Knotentabellen

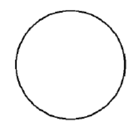
Die folgenden Tabellen enthalten, vom Nullknoten ausgehend, systematisch alle Erweiterungen bis zu einer Kreuzungszahl von sieben. Alle auftretenden äquivalenten Knotengraphen eines Knotens oder einer Verschlingung werden, sozusagen als Lookup-Table, aufgelistet. Im nächsten Kapitel wird der vollständige Zusammenhang der Knotengraphen gegeben und Schlüsse daraus gezogen.

Legende

Kx.y.z	y.ter Knoten mit x Kreuzungen, z.te Variante
Vx.y.z	y.te Verschlingung mit x Kreuzungen, z.te Variante

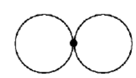
Ursprung

1 Nullknoten **K0.1**



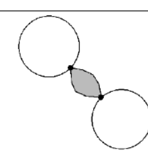
Ursprung: K0.1
aus K0.1 durch Verdrehen entstanden bzw. durch Teilung

1 2 K 1 2 = 1 1 K 2 2 reduzierbarer Knoten K0.1 = **K1.1**



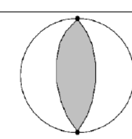
Ursprung: K1.1

1 1 Z 2 2 reduzierbarer Knoten = **K2.1**



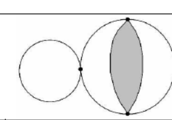
Ursprung: K1.1

1 2 Z 1 2 Verschlingung **V2.1**



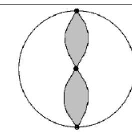
Ursprung: V2.1

1 1 K 2 3 2 4 Z 3 4 reduzierbare Verschlingung **V3.1**

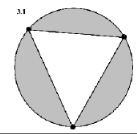


Ursprung: V2.1 und durch Teilung aus K1.1

1 2 Z Z 1 2 Knoten **K3.1.1**

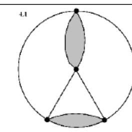


1 2 Z Z 1 2 Knoten **K3.1.2**

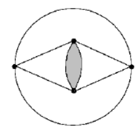


Ursprung: K3.1.1 und durch Teilung aus V2.1

1 3 Z 2 4 3 4 Z 1 2 Knoten **K4.1.1**

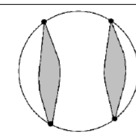


durch Törnen =
1 2 K 3 4 3 5 Z 4 6 5 6 K 1 2 Knoten **K4.1.2**



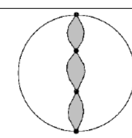
Ursprung: V3.1

1 2 Z 1 3 2 4 Z 3 4 Verschlingung **V4.0**

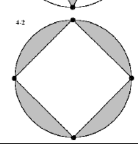


Ursprung: K3.1.1

1 2 Z Z Z 1 2 Verschlingung **V4.1.1**

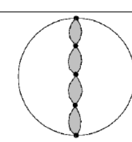


durch Klappung Verschlingung **V4.1.2**

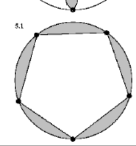


Ursprung: V4.1.1

1 2 Z Z Z Z 1 2 Knoten **K5.1.1**

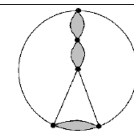


durch Klappung Knoten **K5.1.2**

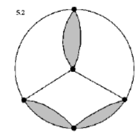


Ursprung: K4.1.1, K4.1.2, V4.1.1 und durch Teilung aus K3.1

1 2 Z Z 3 4 1 3 Z 2 4 Knoten **K5.2.1**

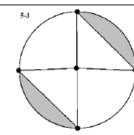


1 3 Z 2 4 3 4 Z Z 1 2 Knoten **K5.2.2**

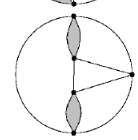


Ursprung: K4.1.1, K4.1.2 und durch Teilung aus K3.1

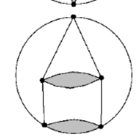
1 5 Z 2 6 5 6 K 3 4 1 3 Z 2 4 Verschlingung **V5.1.1**



durch Klappung
1 2 Z 3 6 2 3 K 4 5 4 6 Z 1 5 Verschlingung **V5.1.2**

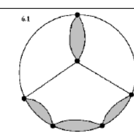


1 3 Z 2 4 3 5 Z 4 6 5 6 K 1 2 Verschlingung **V5.1.3**

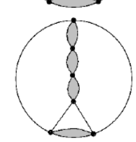


Ursprung: K5.2.1, K 5.1.1 und durch Teilung aus V4.1

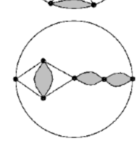
1 2 Z Z Z 3 4 1 3 Z 2 4 Knoten **K6.1.1**



durch Klappung
1 2 Z 3 4 1 3 Z Z Z 2 4 Knoten **K6.1.2**

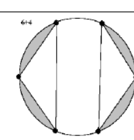


durch Törnen
1 2 K 3 4 3 5 Z 4 6 5 6 Z Z 1 2 Knoten **K6.1.3**



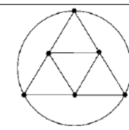
Ursprung: durch Teilung des reduzierbaren Knotens K2.1

1 2 Z Z 2 3 3 4 Z Z 1 4 nichtprimer Knoten **K6**



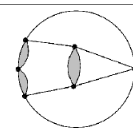
Ursprung: durch Teilung aus K3.1, V2.1
1 2 K 4 5 2 6 K 3 7 1 3 K 8 9 4 9 K 10 12 5 6 K 10 11 7 8 K 11 12

Verschlingung **V6.0**

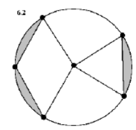


Ursprung: K5.2.1, V5.1.1, V5.1.2, V5.1.3 und durch Teilung aus V4.1

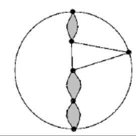
1 2 K 5 6 5 3 Z 6 4 1 3 Z Z 2 4 — Knoten **K6.2.1**



1 5 Z Z 2 6 5 6 K 3 4 1 3 Z 2 4 — Knoten **K6.2.2**

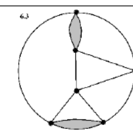


durch Klappung — Knoten **K6.2.3**
1 2 K 5 6 5 3 Z 6 4 1 3 Z Z 2 4

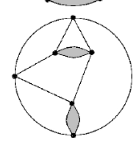


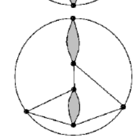
Ursprung: V5.1.1, V5.1.2, V5.1.3 und durch Teilung aus K4.1

1 7 Z 2 8 7 8 K 3 6 2 3 K 4 5 4 6 Z 1 5 — Knoten **K6.3.1**

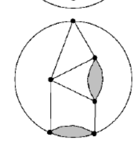


durch Klappung
1 5 K 7 8 7 2 Z 8 6 5 6 K 3 4 1 3 Z 2 4 — Knoten **K6.3.2**



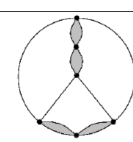


durch Klappung
1 2 K 5 6 5 3 Z 6 4 1 9 Z 3 10 9 10 K 2 4 — Knoten **K6.3.3**



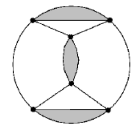
Ursprung: K5.2.1

1 2 Z Z 3 4 1 3 Z Z 2 4 — Verschlingung **V6.1**



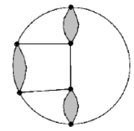
Ursprung: K5.2.1, K5.2.2, V5.1.1, V5.1.2, V5.1.3
und durch Teilung aus K4.1

1 5 Z 2 6 5 6 Z 3 4 1 3 Z 2 4 Verschlingung **V6.2.1**



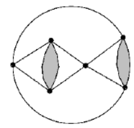
durch Klappung

1 2 Z 7 8 7 3 Z 8 4 1 3 Z 2 4 Verschlingung **V6.2.2**

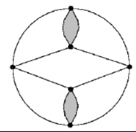


durch Törnen Verschlingung **V6.2.3**

1 2 K 5 6 5 7 Z 6 8 7 8 K 3 4 1 3 Z 2 4

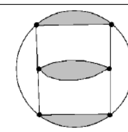


durch Klappung Verschlingung **V6.2.4**



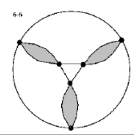
Ursprung: K5.2.2, V5.1.2, V5.1.3 und durch Teilung aus V4.1

1 2 Z 3 4 1 7 Z 3 8 7 8 Z 2 4 Verschlingung **V6.3.1**



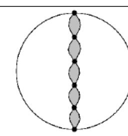
durch Klappung

1 2 Z 3 6 2 4 Z 3 5 4 6 Z 1 5 Verschlingung **V6.3.2**



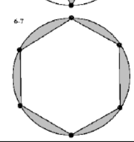
Ursprung: K 5.1.1

1 2 Z Z Z Z Z 1 2 Verschlingung **V6.4.1**



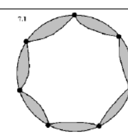
durch Klappung

1 3 Z 2 4 3 4 Z Z Z 1 2 Verschlingung **V6.4.2**



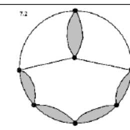
Ursprung: V6.4.1

1 2 Z Z Z Z Z Z 1 2 Knoten **K7.1**

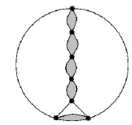


Ursprung: K6.1.1, K6.1.2, K6.1.3, V6.4.1 und durch Teilung aus K5.1

1 2 Z Z Z Z 3 4 1 3 Z 2 4 Knoten **K7.2.1**

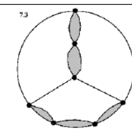


1 2 Z 3 4 1 4 Z Z Z Z 2 3 Knoten **K7.2.2**



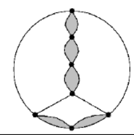
Ursprung: V6.1, K6.1.1, K6.1.2, K6.1.3, K6.2.2

1 2 Z Z Z 3 4 1 3 Z Z 2 4 Knoten **K7.3.1**



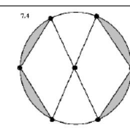
durch Klappung

1 2 Z Z 3 4 1 3 Z Z Z 2 4 Knoten **K7.3.2**



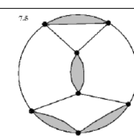
Ursprung: K6.2.2

1 2 Z Z 3 6 2 3 K 4 5 4 6 Z Z 1 5 Knoten **K7.4**

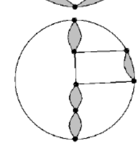


Ursprung: V6.1, V6.2.1, K6.2.2, V6.2.2 und durch Teilung aus K5.2

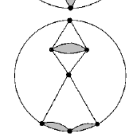
1 2 Z 3 6 2 3 Z 4 5 4 6 Z Z 1 5 Knoten **K7.5.1**



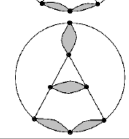
1 2 Z 5 6 3 5 Z Z 4 6 1 3 Z 2 4 Knoten **K7.5.2**



1 2 Z Z 3 4 1 3 K 9 10 9 11 Z 10 12 11 12 K 2 4 Knoten **K7.5.3**

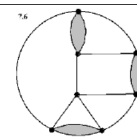


1 2 Z Z 3 4 1 9 Z 3 10 9 10 Z 2 4 Knoten **K7.5.4**

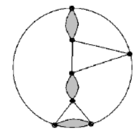


Ursprung: K6.2.2, K6.3.1, V6.2.1, V6.2.2
und durch Teilung aus K3.1, K5.2, V5.1

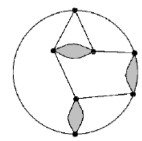
1 7 Z 2 8 7 8 K 3 6 2 3 Z 4 5 4 6 Z 1 5 Knoten **K7.6.1**



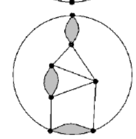
1 2 Z 3 6 2 3 Z 4 5 4 6 K 11 12 11 1 Z 12 5 Knoten **K7.6.2**



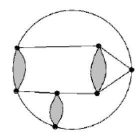
1 2 K 7 8 7 3 Z 8 6 2 3 Z 4 5 4 6 Z 1 5 Knoten **K7.6.3**



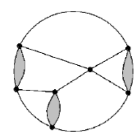
1 2 Z 5 6 3 5 K 9 10 9 4 Z 10 6 1 3 Z 2 4 Knoten **K7.6.4**



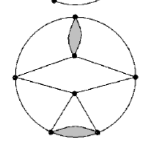
1 2 Z 5 6 3 5 Z 4 6 1 11 Z 3 12 11 12 K 2 4 Knoten **K7.6.5**



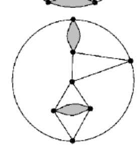
1 2 Z 9 10 9 3 Z 10 6 2 3 K 4 5 4 6 Z 1 5 Knoten **K7.6.6**



durch Törnen
1 2 Z 3 4 1 3 K 5 9 2 4 K 6 10 5 7 K 6 8 7 9 Z 8 10 Knoten **K7.6.7**

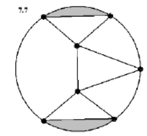


durch Törnen
1 2 K 7 8 7 9 Z 8 10 9 10 K 3 6 2 3 K 4 5 4 6 Z 1 5 Knoten **K7.6.8**

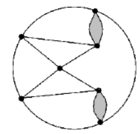


Ursprung: K6.3.1 und durch Teilung aus K3.1, V5.1

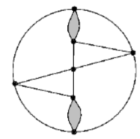
1 2 K 7 8 7 3 K 9 10 9 8 Z 10 6 2 3 K 4 5 4 6 Z 1 5 Knoten **K7.7.1**



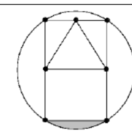
1 2 K 7 8 7 3 Z 8 6 2 3 K 4 5 4 11 Z 6 12 11 12 K 1 5 Knoten **K7.7.2**



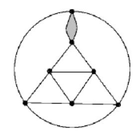
1 2 Z 8 10 1 6 K 4 5 6 8 K 7 9 2 3 K 9 10 3 4 Z 5 7 Knoten **K7.7.3**



Ursprung: V6.0 und durch Teilung aus K3.1, K4.1, V4.1, V5.1
1 10 K 2 11 11 13 K 9 12 2 12 K 3 9 10 13 K 6 7 9 14 K 6 8 1 7 Z 3 8
Verschlingung **V7.0.1**

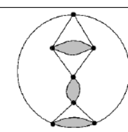


durch Klappung
1 10 K 2 11 11 13 K 9 12 2 12 K 3 9 10 13 K 6 7 9 14 K 6 8 1 7 Z 3 8
Verschlingung **V7.0.2**

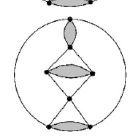


Ursprung: K6.1.1, K6.1.2, K6.1.3 und durch Teilung aus K3.1

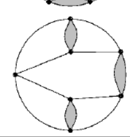
1 2 K 5 6 5 7 Z 6 8 7 8 Z 3 4 1 3 Z 2 4 Verschlingung **V7.1.1**



1 2 Z 7 8 7 9 Z 8 10 9 10 K 3 4 1 3 Z 2 4 Verschlingung **V7.1.2**

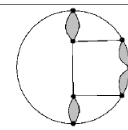


1 2 K 3 4 3 5 Z 4 6 5 6 Z 11 12 11 1 Z 12 2 Verschlingung **V7.1.3**

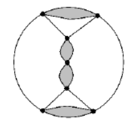


Ursprung: K6.1.1, K6.1.2, K6.1.3, V6.2.1, V6.2.2
und durch Teilung aus K5.2

1 5 Z 2 6 5 6 Z Z 3 4 1 3 Z 2 4 Verschlingung **V7.6.1**

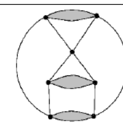


1 2 Z 3 6 2 3 Z Z 4 5 4 6 Z 1 5 Verschlingung **V7.6.2**

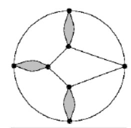


Ursprung: V6.2.1, V6.2.2 und durch Teilung aus K3.1, V5.1

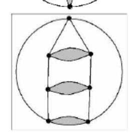
1 7 Z 2 8 7 8 K 5 6 3 5 Z 4 6 1 3 Z 2 4 Verschlingung **V7.2.1**



1 2 Z 3 4 1 7 Z 3 5 7 8 Z 5 6 2 4 K 6 8 Verschlingung **V7.2.2**

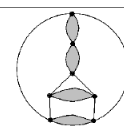


1 2 K 7 8 7 5 Z 8 6 3 5 Z 4 6 1 3 Z 2 4 Verschlingung **V7.2.3**

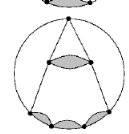


Ursprung: K6.1.1, K6.1.2, K6.1.3, K6.2.2 und durch Teilung aus K5.1

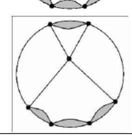
1 2 Z Z 9 10 9 3 Z 10 4 1 3 Z 2 4 Verschlingung **V7.3.1**



1 2 K 5 6 5 3 Z 6 4 1 3 Z Z Z 2 4 Verschlingung **V7.3.2**

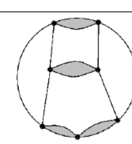


1 2 Z Z Z 3 6 2 3 K 4 5 4 6 Z 1 5 Verschlingung **V7.3.3**

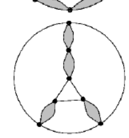


Ursprung: V6.3.2, V6.1, K6.2.2 und durch Teilung aus K5.1

1 4 Z Z 2 3 2 5 Z 1 6 4 6 Z 3 5 Verschlingung **V7.4.1**

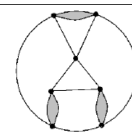


1 4 Z 2 3 2 5 Z Z 1 6 4 6 Z 3 5 Verschlingung **V7.4.2**

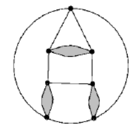


Ursprung: V6.3.2, K6.3.1, K6.2.2 und durch Teilung aus K5.2, V5.1

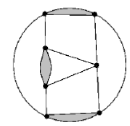
1 7 Z 4 8 7 8 K 2 3 2 5 Z 1 6 4 6 Z 3 5 Verschlingung **V7.5.1**



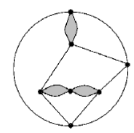
1 4 K 7 8 7 2 Z 8 3 2 5 Z 1 6 4 6 Z 3 5 Verschlingung **V7.5.2**



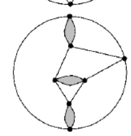
1 4 Z 2 3 2 5 Z 1 6 4 6 K 11 12 11 3 Z 12 5 Verschlingung **V7.5.3**



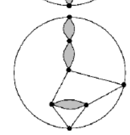
1 2 K 7 8 7 3 Z Z 8 6 2 3 K 4 5 4 6 Z 1 5 Verschlingung **V7.5.4**



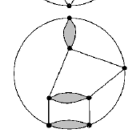
1 2 Z 7 8 7 3 Z 8 6 2 3 K 4 5 4 6 Z 1 5 Verschlingung **V7.5.5**



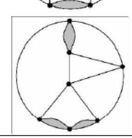
1 2 K 7 8 7 3 Z 8 6 2 3 K 4 5 4 6 Z Z 1 5 Verschlingung **V7.5.6**



1 7 Z 2 8 7 3 Z 8 6 2 3 K 4 5 4 6 Z 1 5 Verschlingung **V7.5.7**



1 2 Z Z 3 6 2 3 K 4 5 4 6 K 11 12 11 1 Z 12 5 Verschlingung **V7.5.8**



8 Auswertung

8.1 Sätze

Unterschiedliche Graphen von Knoten und Verschlingungen stehen durch die bisher zwei Arten der Erweiterung in Beziehung zueinander. Jeder Graph, außer dem Nullknoten, sollte mindestens einen Vorgänger und mehrere Nachfolger haben.

Sei $K = \{k_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Knotengraphen und k_n ein Knotengraph mit n Kreuzungen. Jede Kreuzung kann längs oder quer erweitert werden. Somit gibt es zumeist eine große Anzahl von Erweiterungen eines Knotengraphen. Sei o.B.d.A. $E_r(k_n) = k_{n+1}$ die r.te Erweiterung des Knotengraphen k_n. Dann sei k_{n+1} (unmittelbarer) Nachfolger von k_n genannt, geschrieben $k_n \triangleright k_{n+1}$.

Wird der Knotengraph k_{n+x} durch eine Folge von x Erweiterungen von k_n erzeugt, so ist er ein (mittelbarer) Nachfolger von k_n. Die so verallgemeinerte Nachfolger-Beziehung $\blacktriangleright$ ist eine Relation $\blacktriangleright \subset K \times K$ auf der Menge der Knotengraphen(**Nachfolger-Relation**). Diese Relation ist transitiv, denn ist $k_i \blacktriangleright k_j$ und $k_j \blacktriangleright k_l$ dann stellt die Kombination der Folgen von Erweiterungen die Nachfolger-Beziehung $k_i \blacktriangleright k_l$ her.

Da eine Erweiterung stets einen Knotengraphen mit höherer Kreuzungszahl zur Folge hat existiert zu $k_n \blacktriangleright k_{n+x}$ niemals eine Folge von Erweiterungen so daß $k_{n+x} \blacktriangleright k_n$ gelten würde. Die Nachfolger-Relation ist also asymmetrisch. Damit gilt:

Satz 1: Die Nachfolger-Relation ist eine Ordnungsrelation. ■

Somit läßt sich der Menge der Knotengraphen eine Ordnungsstruktur aufprägen (Siehe Kap. 8.2).

Eine andere Art von Relation bilden die Reduktionen zur Unterscheidung von Knoten und Verschlingungen. Sie fasern die Menge der Knotengraphen in disjunkte Teilmengen, wenn man den letzten Schritt der Reduktion eines jeden Knoten auf den Nullknoten ausschließt. Wenn man dazu die identische Reduktion (die alles unverändert läßt) einführt und die Umkehrung der Reduktionen als strukturerhaltende Erweiterungen zuläßt, dann werden Folgen von Reduktionen reflexiv, transitiv und symmetrisch und es gilt:

Satz 2: Folgen von Reduktionen sind Äquivalenzrelationen zwischen Knotengraphen unterschiedlicher Kreuzungszahl. ■

Weiterhin gibt es die zuvor definierten Äquivalenzoperation zur Umwandlung eines Knotengraphen in einen anderen mit gleicher Kreuzungszahl. Wenn die Operation, die alles unverändert läßt als identische Äquivalenzoperation eingeführt wird, dann sind Folgen dieser Äquivalenzoperationen reflexiv, transitiv und symmetrisch. Somit gilt:

Satz 3: Folgen von Äquivalenzoperationen sind Äquivalenzrelationen zwischen Knotengraphen gleicher Kreuzungszahl. ■

Satz 4: Mit Ausnahme des Nullknotens ist die Anzahl der Parten in einem Knotengraph doppelt so groß wie die Anzahl der Kreuzungen, da eine Kreuzung durch zwei Parten gebildet wird. ■

Gegebenenfalls erlauben diese Sätze weitere Aussagen über den Zusammenhang der Relationen, über Infima, maximale und kleinste Elemente etc., die zur Klassifikation und letztlich zur Berechnung von Knotengraphen bzw. von Knoten beitragen könnten.

8.2 Knotengenealogie

Hier folgt die Liste der Ableitungen der Knotengraphen, sozusagen ihre Verwandtschaftsbeziehungen:

K0.1 teilt sich (reduzierbar) in K1.1

K1.1 teilt sich in K3.1 und wird erweitert zu K2.1 (reduzierbar), V2.1

V2.1 wird erweitert zu K3.1

K3.1 teilt sich in K5.1, K5.2, K7.6, K7.7, V6.0, V7.0, V7.1, V7.2 und wird erweitert zu K4.1, V4.1

K4.1 teilt sich in K6.3, V6.2, V7.0 und wird erweitert zu K5.2, V5.1

V4.1 teilt sich in K6.1, K6.2, K8.18, K9.40, V6.3, V7.0 und wird erweitert zu K5.1, K5.2

K5.1 teilt sich in K7.2,V7.3,V7.4 und wird erweitert zu K6.1,V6.1

K5.2 teilt sich in K7.5, K7.6, V7.5, V7.6 und wird erweitert zu K6.1, K6.2, V6.2, V6.3

V5.1 teilt sich in K7.6, K7.7, V7.0, V7.2, V7.5 und wird erweitert zu K6.2, K6.3, V6.2, V6.3, V6.4

K6.1 wird erweitert zu K7.2, K7.3, V7.1, V7.3, V7.6

K6.2 wird erweitert zu K7.3, K7.4, K7.5, K7.6, V7.3, V7.4, V7.5

K6.3 wird erweitert zu K7.6, K7.7, V7.5

V6.0 wird erweitert zu V7.0

V6.1 wird erweitert zu K7.3, K7.5, V7.4

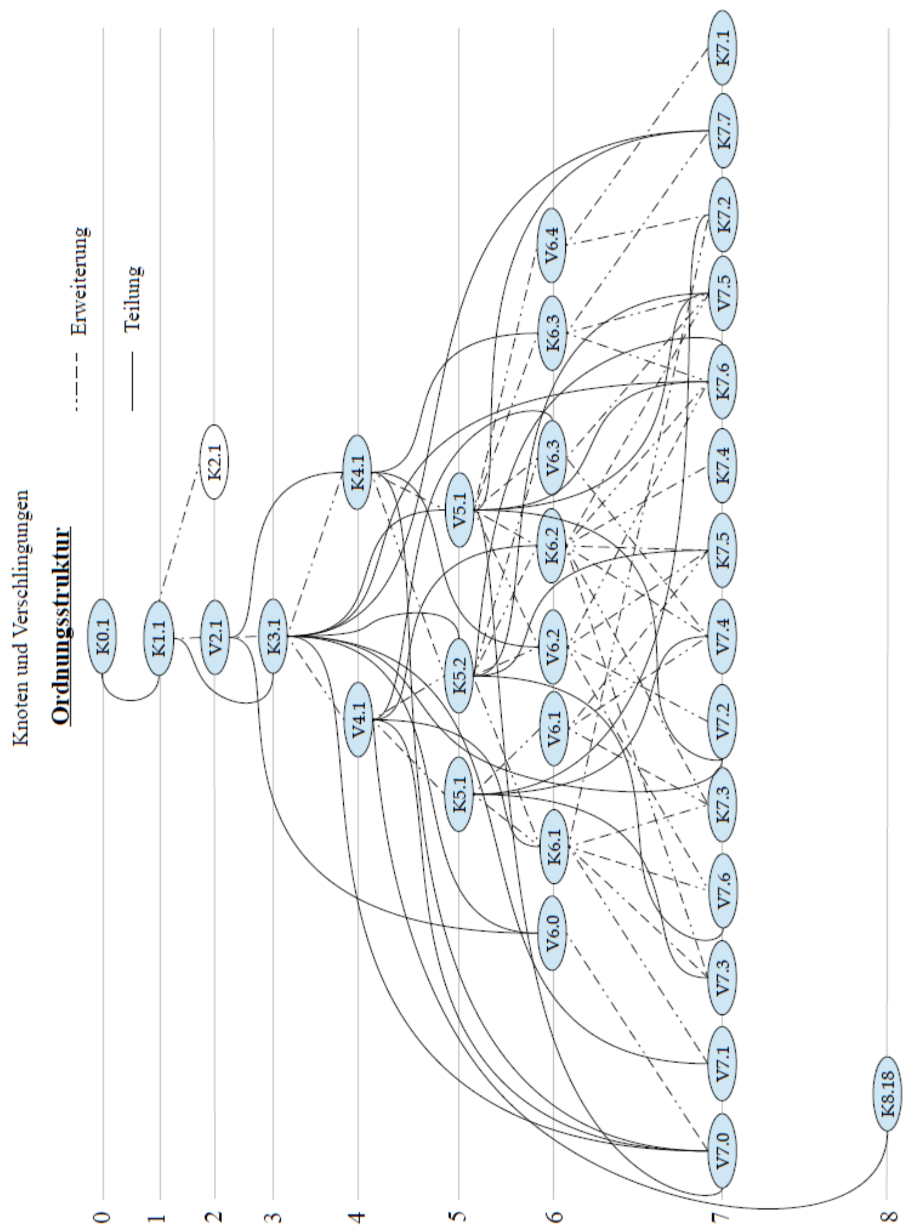
V6.2 wird erweitert zu K7.5, K7.6, V7.2, V7.6

V6.3 wird erweitert zu V7.4, V7.5

V6.4 wird erweitert zu K7.1, K7.2

8.3 Ordnungsstruktur

Die gemäß Satz 1 definierte Ordnungsrelation bewirkt folgende Ordnungsstruktur auf der Menge der Knoten- und Verschlingungsgraphen:



8.4 Äquivalenzklassen der Reduktion

Die gemäß Satz 2 definierte Äquivalenzrelation zwischen Knotengraphen mit unterschiedlicher Kreuzungszahl fasert die Menge der Knotengraphen in Äquivalenzklassen auf. Letztlich werden alle Primknoten auf den Nullknoten reduziert. Jedoch gibt es keine Reduktion des Achtknotens mit vier Kreuzungen auf den Überhandknoten mit drei Kreuzungen, sondern nur die direkte Reduktion auf den Nullknoten.

Läßt man die letzte Reduktion auf den Nullknoten weg, kann man alle Knoten entweder auf den Achtknoten oder den Überhandknoten reduzieren und erhält somit bereits zwei Klassen.

Überhandknoten

Achtknoten

Nebenbemerkung: Bootsmann Stempel an der Seemannsschule Hamburg-Finkenwerder brachte uns Leichtmatrosen bei, daß alle Gebrauchsknoten aus dem Überhandkonten und dem Achtknoten entwickelt worden seien. Damit hatte er offensichtlich recht.

Bisher gibt es kein Gegenbeispiel (siehe auch Vermutung 3).

8.4.1 Kanonische Abbildung: Klassenzugehörigkeit der Knoten

K3.1 ist der Überhandknoten

K4.1 ist der Achtknoten

K5.1 reduziert zum Überhandknoten

K5.2 reduziert zum Überhandknoten

K6.1 reduziert zum Achtknoten

K6.2 reduziert zum Achtknoten

K6.3 reduziert zum Überhandknoten

K7.1 reduziert zum Überhandknoten

K7.2 reduziert zum Überhandknoten

K7.3 reduziert zum Überhandknoten

K7.4 reduziert zum Überhandknoten

K7.5 reduziert zum Überhandknoten

K7.6 reduziert zum Überhandknoten

K7.7 reduziert zum Achtknoten

K8.1 reduziert zum Achtknoten

K8.2 reduziert zum Achtknoten

K8.3 reduziert zum Achtknoten

K8.4 reduziert zum Achtknoten

K8.5 reduziert zum Achtknoten

K8.6 reduziert zum Achtknoten

K8.7 reduziert zum Überhandknoten

K8.8 reduziert zum Überhandknoten

K8.9 reduziert zum Achtknoten

K8.10 reduziert zum Überhandknoten

K8.11 reduziert zum Achtknoten

K8.12 reduziert zum Achtknoten

K8.13 reduziert zum Überhandknoten

K8.14 reduziert zum Achtknoten

K8.15 reduziert zum Überhandknoten

K8.16 reduziert zum Überhandknoten

K8.17 reduziert zum Achtknoten

K8.18 reduziert zum Überhandknoten

K8.19 reduziert zum Überhandknoten

K8.20 reduziert zum Überhandknoten

K8.21 reduziert zum Überhandknoten

K9.1 reduziert zum Überhandknoten

K9.2 reduziert zum Überhandknoten

K9.3 reduziert zum Überhandknoten

K9.4 reduziert zum Überhandknoten

K9.5 reduziert zum Überhandknoten

K9.6 reduziert zum Überhandknoten

K9.7 reduziert zum Überhandknoten

K9.8 reduziert zum Überhandknoten

K9.9 reduziert zum Überhandknoten

K9.10 reduziert zum Überhandknoten

K9.11 reduziert zum Überhandknoten

K9.12 reduziert zum Überhandknoten

K9.13 reduziert zum Überhandknoten

K9.14 reduziert zum Achtknoten

K9.15 reduziert zum Überhandknoten

K9.16 reduziert zum Überhandknoten

K9.17 reduziert zum Achtknoten

K9.18 reduziert zum Überhandknoten

K9.19 reduziert zum Achtknoten

K9.20 reduziert zum Überhandknoten

K9.21 reduziert zum Überhandknoten

K9.22 reduziert zum Achtknoten

K9.23 reduziert zum Überhandknoten

K9.24 reduziert zum Überhandknoten

K9.25 reduziert zum Überhandknoten

K9.26 reduziert zum Achtknoten

K9.27 reduziert zum Achtknoten

K9.28 reduziert zum Überhandknoten

K9.29 reduziert zum Überhandknoten

K9.30 reduziert zum Achtknoten

K9.31 reduziert zum Überhandknoten

K9.32 reduziert zum Achtknoten

K9.33 reduziert zum Achtknoten

K9.34 reduziert zum Achtknoten

K9.35 reduziert zum Überhandknoten

K9.36 reduziert zum Achtknoten

K9.37 reduziert zum Achtknoten

K9.38 reduziert zum Überhandknoten

K9.39 reduziert zum Achtknoten

K9.40 reduziert zum Achtknoten

K9.40 reduziert zum Achtknoten

K9.41 reduziert zum Achtknoten

K9.42 reduziert zum Achtknoten

K9.44 reduziert zum Überhandknoten

K9.45 reduziert zum Achtknoten

K9.46 reduziert zum Überhandknoten

K9.47 reduziert zum Achtknoten

K9.48 reduziert zum Achtknoten

K9.49 reduziert zum Achtknoten

K10.1 Perko 1 reduziert zum Überhandknoten

K10.2 Perko 2 reduziert zum Achtknoten

8.4.2 Grad der Verschlingungen

Verschlingungen lassen sich nach Reduktion gemäß ihrem Grad klassifizieren.

V2.1 ist vom Grad 2

V3.1 ist vom Grad 2

V4.0 ist vom Grad 3

V4.1 ist vom Grad 2

V5.1 ist vom Grad 2

V6.0 ist vom Grad 3

V6.1 ist vom Grad 2

V6.2 ist vom Grad 2

V6.3 ist vom Grad 3

V6.4 ist vom Grad 2

V7.0 ist vom Grad 2

V7.1 ist vom Grad 2

V7.2 ist vom Grad 3

V7.3 ist vom Grad 2

V7.4 ist vom Grad 2

V7.5 ist vom Grad 2

V7.6 ist vom Grad 2

Die gemäß Satz 3 definierte Äquivalenzrelation innerhalb der Knotengraphen einer Kreuzungszahl stellt die Eindeutigkeit der Knotengraphen sicher.

8.5 Vermutungen

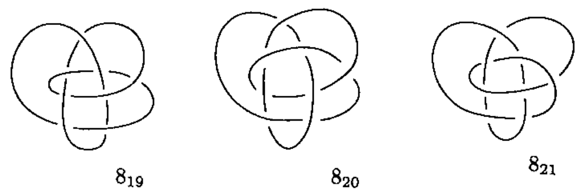
Es folgen einige naheliegende Vermutungen, um deren Beweis sich hier aber noch nicht bemüht werden soll.

Vermutung 1: Die Ordnungsstruktur der Knotengraphen ist unter der Nachfolger-Relation eine Halbordnung. □

Vermutung 2: Eine Wuling ist immer nichtalternierend. □

Korollar: Aber nicht jedes nichtalternierende Diagramm ist eine Wuling. ■

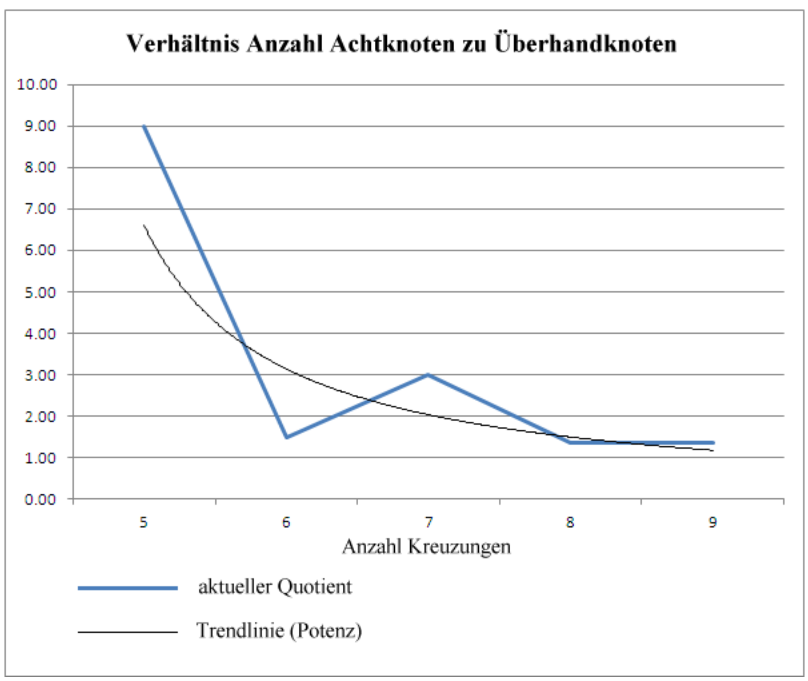
Gegenbeispiele: Die Knoten K8.19, K8.20, K8.21, etc.:



Vermutung 3: Alle Knotengraphen echter Knoten reduzieren sich entweder auf den Überhandknotens oder den Achtknoten. □

Vermutung 4: Die meisten Knoten gehören zur Klasse des Überhandknotens. Das Verhältnis von Überhandknoten zu Achtknoten ist bisher $\frac{47}{35} = 1.34$. □

Vermutung 5: Das Verhältnis von Achtknoten zu Überhandknoten konvergiert gegen eine feste Zahl im Bereich von 1. □



Vermutung 6: Ein Knotengraph mit überlappenden Parten und ungerader Anzahl von Kreuzungen ist planar, wenn die Summer der Anzahl der Überlappungen, Kreuzungen und Zweiecke ungerade ist, sonst ist er nichtplanar. □

8.6 Weiterführende Fragen

Es lassen sich z.B. folgende, weitergehende Fragen stellen:

- Wie lassen sich die Mehrdeutigkeiten der Knotengraphen auflösen?
- Stellt der umgezeichnete Knotengraph einer Wuling immer nur Knoten dar, oder können es auch Verschlingungen sein? Hier ergibt sich ein weiteres Feld für Untersuchungen.
- Welche Knotengraphen gehören zu den Äquivalenzklassen der Reduktion und welche Schlüsse lassen sich daraus für die Klassifikation der Knoten ziehen?
- Die angeführten Äquivalenzoperationen reichten bisher aus, um gleichwertige Knotengraphen gleicher Kreuzungszahl zu identifizieren. Gilt dies auch für die unendliche Zahl von Knotengraphen oder müssen immer neue Äquivalenzumformungen formuliert werden um zunehmend komplexere Knotengraphen als gleich zu erkennen?
- Könnte es passieren, dass sich beim Erweitern reduzierbare Knoten ergeben?
- Welchen maximalen Grad haben Verschlingungen bei gegebener Kreuzungszahl?
- Wieviele Zweiecke kann ein Knotengraph maximal bei gegebener Kreuzungszahl haben?
- Da der Überhandknoten und der Achtknoten direkt auf den Nullknoten reduzieren, könnte man sie als **Fundamentalknoten** bezeichnen. Die Frage stellt sich ob es weitere Fundamentalknoten gibt, die ohne Zwischenstufen direkt auf den Nullknoten reduzieren. Unter den bisher betrachteten Knoten mit Kreuzungszahlen bis 10 ist kein weiterer vorhanden.
- Lassen sich die Ordnungs- und Äquivalenzrelationen in den bekannten Knoteninvarianten (z.B. den Jones- oder Conway-Polynomen) wiederfinden?

8.7 Entwicklung der Methoden

Die Erweiterungsoperationen eine Kreuzung in ein Zweieck quer oder längs zu erweitern waren nicht ausreichend für alle Knotengraphen. Die Übersetzung in herkömmliche Knotendiagramme mit gleicher Kreuzungszahl gelang bisher immer problemlos, aber es fehlte mindestens eine Regel, da es Knoten wie den türkischen Bund gab, die nicht erzeugt werden konnten.

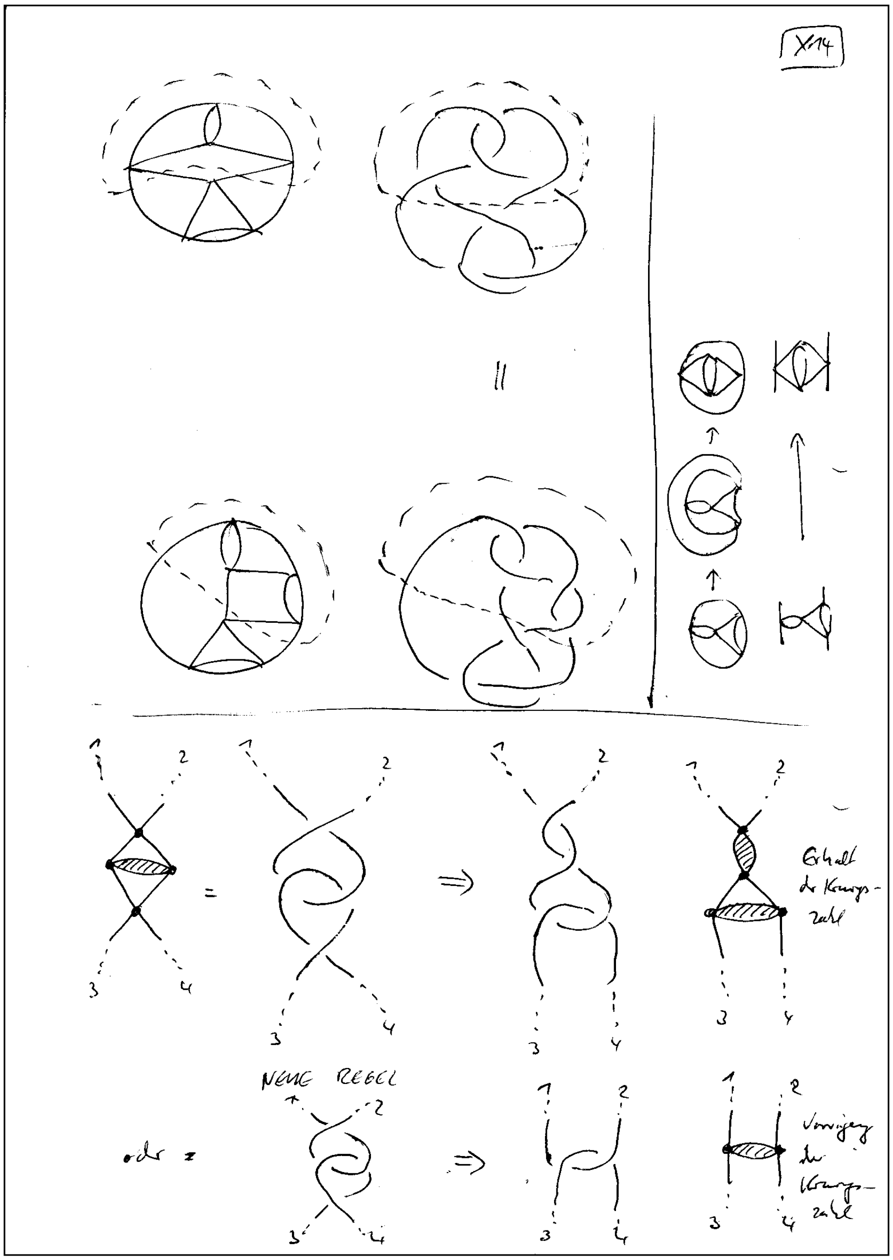
Manchmal gelang die Formulierung einer Regel nur durch Rückgriff auf die "Semantik" der Knotengraphen, also die dazugehörigen, geeigneten Knotendiagramme und das Herumspielen mit den entsprechenden Knoten. Ich benutzte gelegentlich sogar Bändsel um klarer zu sehen.

Die Teilungsregel wurde eingeführt, um den türkischen Bund und ähnliche Knoten erzeugen zu können. Ebenso die Reduktion durch Erweiterung, um zweieckfreie Knotengraphen reduzieren zu können.

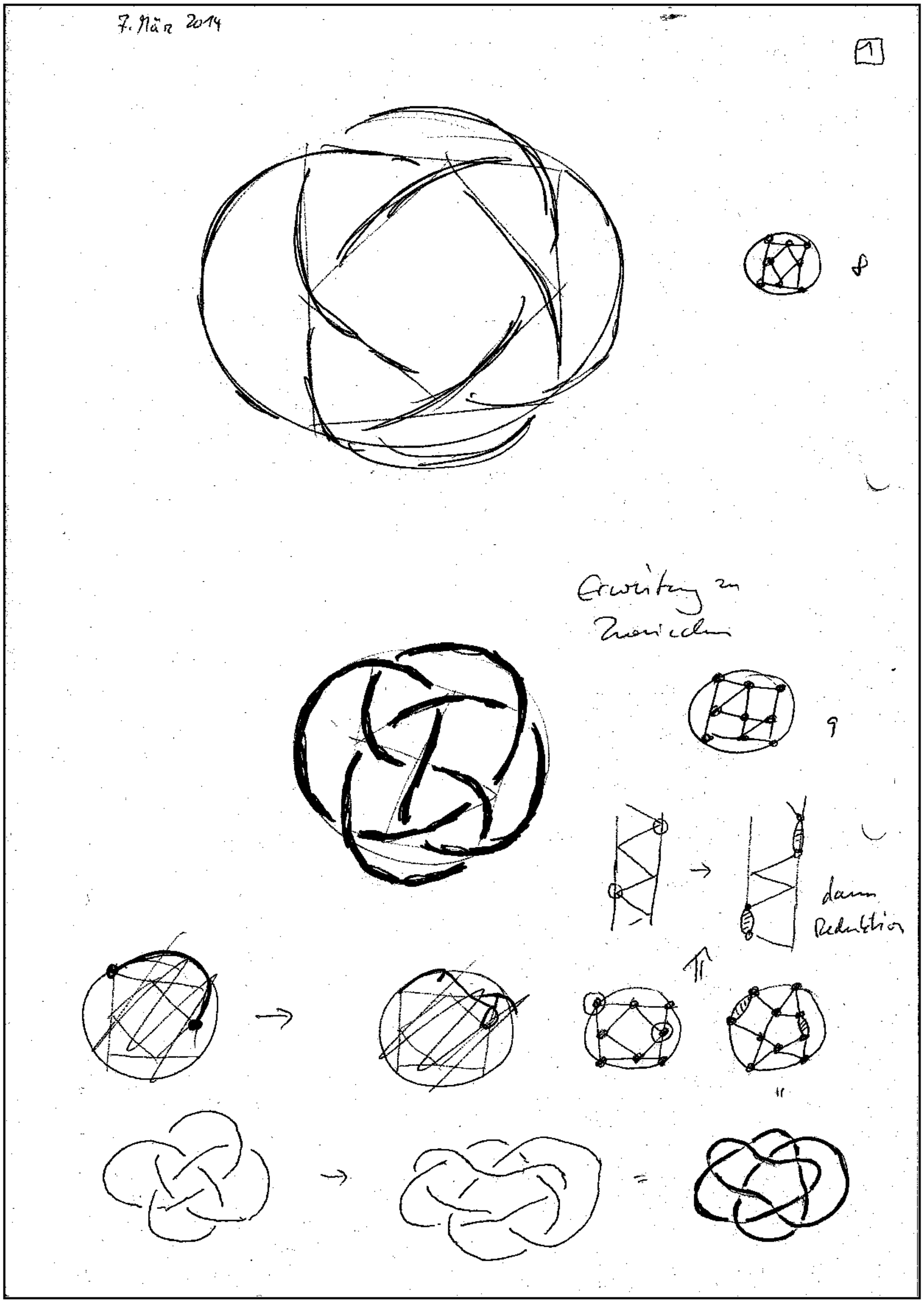
Hier folgen einige Beispiele der originalen Arbeitsblätter, die zu den dargelegten Ideen führten:

Zum Beispiel mußte die Regel des Törnens eingeführt werden um den Knotengraph des Knotens K7.6.7 als äquivalent zu anderen Knoten der Klasse K7.6 zu erkennen:

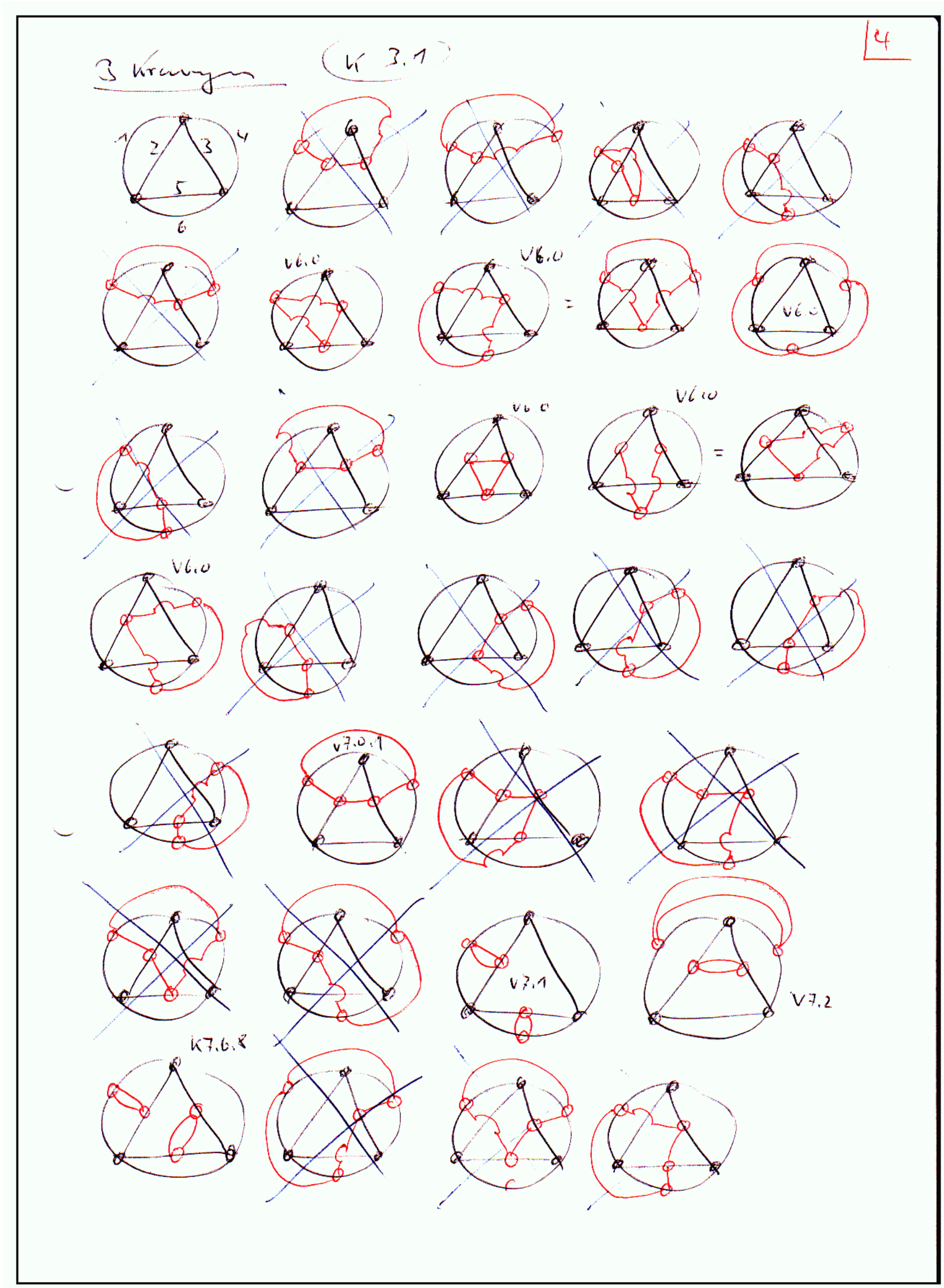
Originalzeichnung zur Törnregel



Originalzeichnung zur Reduktionsregel durch Erweiterung

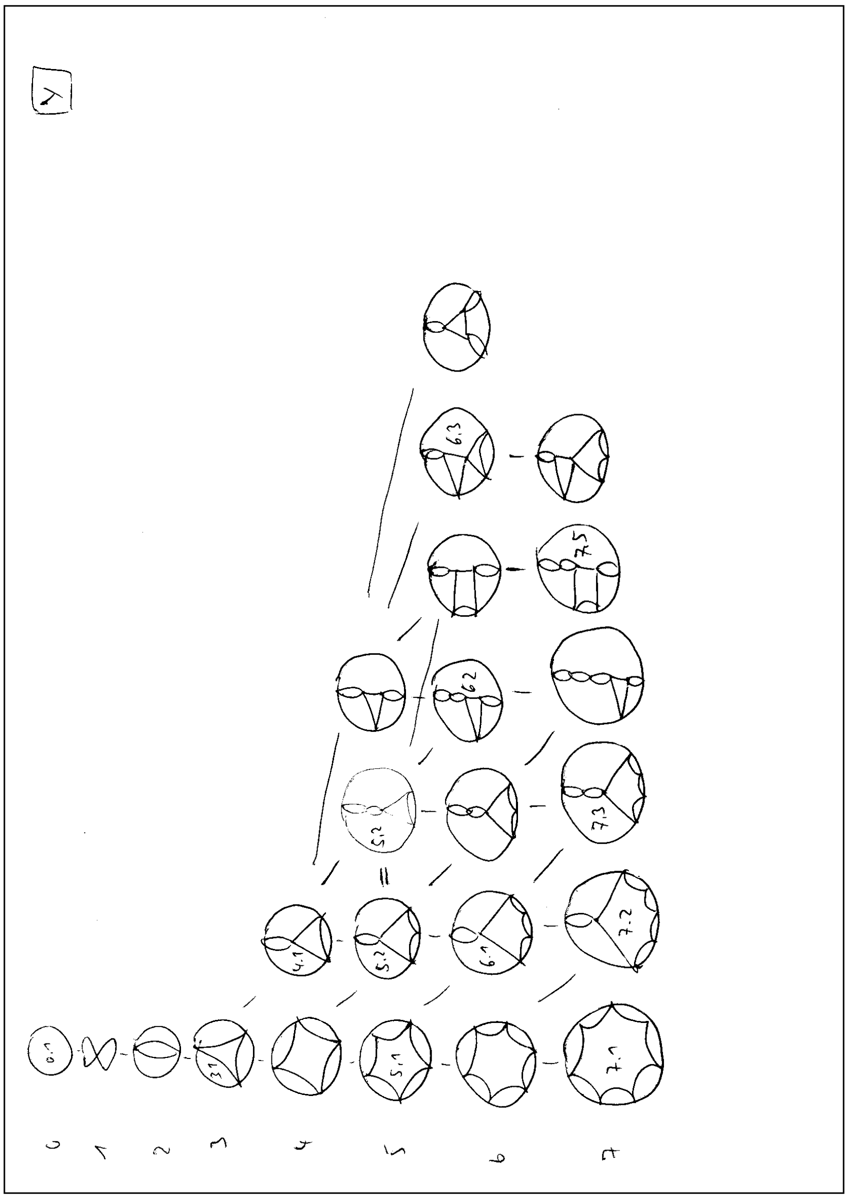


Beispiel für Ableitungen: Teilung des Überhandknotens:



Ganz zu Beginn bestand die Vermutung, die Knotengraphen in eine Ordnungsstruktur einfügen zu können, die etwa wie im folgenden Bild aussieht. Damit verbunden war die Hoffnung, alleine aus der Position im Ordnungsgraphen bestimmen zu können ob es sich um einen Knoten oder eine Verschlingung handelt. Dieses hat sich letztendlich nicht bestätigt:

Originalzeichnung zum Ordnungsgraphen



8.8 Probleme

Neben den in den Fragen genannten weiterführenden Aufgabenstellungen gibt es noch offene Probleme, die gelöst werden sollten. Neben der Frage, ob die Masterialsammlung so wie sie bis jetzt vorliegt fehlerfrei ist, ist es die Frage ob die Definitionen der Relationen und die daraus folgenden Sätze mathematisch korrekt sind.

8.8.1 Korrektheit der Sätze

Die Definitionen, Relationen und Sätze sind noch auf Korrektheit und Richtigkeit der Beweise zu überprüfen. Dieses ist von Mathematikern zu untersuchen.

8.8.2 Fehlerfreiheit

Die Vollständigkeit und Fehlerfreiheit der Knotengraphen, die Primknoten darstellen, läßt sich leicht anhand der in der Literatur veröffentlichten Knotentabellen beantworten. Schwieriger ist es im Fall der Verschlingungen, für die es keine Tabellen gibt. Hier ist sowohl die Frage der Vollständigkeit, wie auch das Problem nichtentdeckter Identitäten noch ungelöst. Ich habe mir alle Mühe gegeben, für Fehlerfreiheit zu sorgen, kann aber (noch) nicht dafür garantieren.

9 Übungen

1. Erzeuge den Knotengraph zur Beschreibung

   1 2 K 7 8 7 3 K 9 10 9 8 Z 10 6 2 3 K 4 5 4 6 Z 1 5

2. Zeige die Äquivalenz zwischen dem Knotengraphen K7.6.1 und K7.6.7

3. Reduziere den Knotengraph K7.5.2 auf den Nullknoten. Läuft die Reduktion über den Achtknoten oder über den Überhandknoten?

4. Erzeuge einen Knotengraphen mit sieben Kreuzungen aus dem Knotengraph K6.2.2 durch Erweiterung der einzigen Kreuzung.

5. Ist es der Graph eines Knotens oder einer Verschlingung?

6. Reduziere den Knotengraph V6.0.

10 Quellenverzeichnis

References

[1] Charles Livingston, Knotentheorie für Einsteiger
Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden 1995

[2] Alexei Sossinsky, Mathematik der Knoten
Rowohlt Verlag, Reinbek bei Hamburg 2000

[3] Peter Tittmann, Graphentheorie
Carl Hanser Verlag, München 2011