

# Rekursive Lösung der Umformung des Polynoms n-ten Grades.

Wolf Scheuermann

Rodenbach, den 28. Nov. 1989

Beschrieben wird die rekursive Lösung der Umformung des Polynoms n-ten Grades

$$p_n(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

in die Form

$$p_n(x) = a_{0n} \cdot x^0 + a_{1n} \cdot x^1 + \dots + a_{mn} \cdot x^m + \dots + a_{nn} \cdot x^n = \sum_{m=0}^n a_{mn} \cdot x^m$$

Der gesuchte Zusammenhang der  $a_{mn}$  mit den  $x_i$  läßt sich berechnen über

$$a_{mn} = (-1)^{m+n} \cdot b_{mn}$$

wo  $b_{mn}$  rekursiv definiert ist durch

$$b_{mn} = 0, \quad \text{wenn } n < m \text{ oder} \\ n < 0 \text{ oder} \\ m < 0$$

$$b_{mn} = 1, \quad \text{wenn } n = m$$

$$b_{mn} = b_{m-1, n-1} + b_{m, n-1}, \quad \text{sonst.}$$

Beweisen kann ich diese Definition nicht (vielleicht geht es mit vollständiger Induktion), aber kurz den Werdegang schildern. Zuerst rechnete ich die Polynome

$$(x - x_0) \\ (x - x_0) \cdot (x - x_1) \\ (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

aus, und erhielt nach geeignetem Umformen und mit entsprechenden Ergänzungen die Koeffiziententafel ( $a_{mn}$ ) :

m \ n	0	1	2	3	
0	1	0	0	0	
1	$-x_0$	1	0	0	für $-x_0 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 = (x - x_0)$
2	$x_0 \cdot x_1$	$-(x_0 + x_1)$	1	0	für $x_0 \cdot x_1 \cdot x^0 - (x_0 + x_1) \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 =$ $= (x - x_0) \cdot (x - x_1)$
3	$-x_0 \cdot x_1 \cdot x_2$	$x_0 \cdot x_1 + (x_0 + x_1) \cdot x_2$	$-(x_0 + x_1 + x_2)$	1	
				$\ddots$ $a_{mn}$	

Da mich die negativen Vorzeichen störten, die außerdem nach dem einfachen Bildungsgesetz  $(-1)^{m+n}$  vorzukommen schienen, betrachtete ich nur die Koeffiziententafel ( $b_{mn}$ ) :

m \ n	0	1	2	3	
0	1	0	0	0	
1	$x_0$	1	0	0	
2	$x_0 \cdot x_1$	$(x_0 + x_1)$	1	0	
3	$x_0 \cdot x_1 \cdot x_2$	$x_0 \cdot x_1 + (x_0 + x_1) \cdot x_2$	$(x_0 + x_1 + x_2)$	1	
				$\dots$ $b_{mn}$	

Hier war dann die Rekursion  $b_{mn} = b_{m-1n-1} + b_{mn-1} \cdot x_{n-1}$  zu entdecken und an anderen Stellen nachzuprüfen. Die nichtrekursiven Fälle ließen sich leicht bestimmen.

Hier ein Polynom als Beispiel für die Berechnung:  $p_3(x) = (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)$ ,  
 gesucht sind die Koeffizienten in  $p_3(x) = a_{03} \cdot x^0 + a_{13} \cdot x^1 + a_{23} \cdot x^2 + a_{33} \cdot x^3$ .

Es ist  $x_0 = +1$ ,  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = +3$ .

$$\begin{aligned}
 a_{03} &= (-1)^{0+3} \cdot b_{03} = -b_{03} \\
 b_{03} &= b_{-12} + b_{02} \cdot x_2 \\
 b_{-12} &= 0, \text{ weil } m = -1 < 0 \\
 b_{02} &= b_{-11} + b_{01} \cdot x_1 \\
 b_{-11} &= 0, \text{ weil } m < 0 \\
 b_{01} &= b_{-10} + b_{00} \cdot x_0 \\
 b_{-10} &= 0, \text{ weil } m < 0 \\
 b_{00} &= 1, \text{ weil } m = n, \text{ also} \\
 b_{01} &= 0 + 1 \cdot x_0 = 0 + 1 \cdot 1 = 1, \text{ also} \\
 b_{02} &= 0 + 1 \cdot x_1 = 0 + 1 \cdot (-2) = -2, \text{ also} \\
 b_{03} &= 0 + (-2) \cdot x_2 = 0 + (-2) \cdot 3 = -6, \text{ also} \\
 a_{03} &= -b_{03} = 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{13} &= (-1)^{1+3} \cdot b_{13} = b_{13} \\
 b_{13} &= b_{02} + b_{12} \cdot x_2 \\
 b_{02} &= -2 \text{ (siehe oben, sonst müßte auch hier eine Rekursion einsetzen!)} \\
 b_{12} &= b_{01} + b_{11} \cdot x_1 \\
 b_{01} &= 1 \text{ (siehe oben!)} \\
 b_{11} &= 1, \text{ weil } m = n, \text{ also} \\
 b_{12} &= 1 + 1 \cdot x_1 = 1 + 1 \cdot (-2) = -1, \text{ also} \\
 b_{13} &= -2 + (-1) \cdot x_2 = -2 + (-1) \cdot 3 = -2 - 3 = -5, \text{ also} \\
 a_{13} &= b_{13} = -5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{23} &= (-1)^{2+3} \cdot b_{23} = -b_{23} \\
b_{23} &= b_{12} + b_{22} \cdot x_2 \\
b_{12} &= -1, \text{ (siehe oben)} \\
b_{22} &= 1, \text{ weil } m=n, \text{ also} \\
b_{13} &= -1 + 1 \cdot x_2 = -1 + 1 \cdot 3, \text{ also} \\
a_{23} &= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{33} &= (-1)^{3+3} \cdot b_{33} = b_{33} \\
b_{33} &= 1, \text{ weil } m=n, \text{ also} \\
a_{33} &= 1 \text{ das, oder } -1 \text{ ist immer mit } a_{nn} \text{ so!}
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= 6 \cdot x^0 - 5 \cdot x^1 - 2 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 = 6 - 5 \cdot x^1 - 2 \cdot x^2 + x^3 = \\
&= (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)
\end{aligned}$$

wie man leicht durch ausrechnen prüft.

So verzwickelt eine Rekursion im Ablauf aussieht, so einfach läßt sie sich programmieren, man braucht nämlich nur die Definition abzuschreiben:

```

function b(m, n)
{
    if (n < m) or (n < 0) or (m < 0) then return 0;
    if (m = n) then return 1;
    else return b(m - 1, n - 1) + b(m, n - 1) * x[n - 1];
}

```

wobei hier  $x[i]$  das global definierte Nullstellen-Array ist.

```

function a(m, n)
{
    return (-1)^(m + n) * b(m, n);
}

```

So herum läßt sich das Problem also lösen (irgendwie erscheint es mir wie eine Verallgemeinerung der binomischen Formeln).

Andersherum, nämlich die Bestimmung der Nullstellen des Polynoms aus seinen Koeffizienten, ist es natürlich viel interessanter. Mal sehen, vielleicht fällt mir was dazu ein.