

Nicht-Primzahlformeln

Kapt. Wolf Scheuermann, Hamburg 2009

Einleitung

Wie viele mathematische Laien wollte ich einmal eine (rekursive) Formel zur Berechnung der n -ten Primzahl finden. Wie zu erwarten hatte ich dabei wenig Erfolg. Allerdings fand ich einige Terme, die vielleicht zur Charakterisierung von **Nichtprimzahlen** benutzt werden können. Eine Berechnung dieser Terme wäre zugleich doch für Primzahltests und Primfaktorzerlegung geeignet.

Annäherung

Sei \mathbf{N} die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null.

Sei $P \subset \mathbf{N}$ die Menge der Primzahlen.

Sei $Q = \mathbf{N} \setminus (P \cap \{2n \mid n \in \mathbf{N}, n > 1\} \cup \{1\}) = \{2n+1 \mid n \in \mathbf{N}\} = \{3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$ die Menge aller ungeraden Zahlen ohne die Eins unter den natürlichen Zahlen. Q enthält also alle ungeraden Primzahlen aber auch alle sonstigen ungeraden Zahlen, die nicht prim sind.

$Q \cap P = P \setminus \{2\} \neq \{\}$. Diese umständliche Darlegung zusammenfassend: Eine Zahl $q \in Q$ hat die Form $q = q(n) = 2n+1$ wo $n \in \mathbf{N}$.

Ist $q \in Q$ und $q \notin P$ dann lässt sich q als Produkt mindestens zweier anderer ungerader Zahlen darstellen: $q = q(m) = q(k) \cdot q(l)$ wo $k, l \in \mathbf{N}$ und $q(k), q(l) \in Q$.

Aus der Definition von q ergibt sich m zu: $m = m(k, l) = 2kl + k + l$.

Sei $M = \{m \mid m = m(k, l), k, l \in \mathbf{N}\}$ die **Indexmenge der Nichtprimzahlen** aus Q .

Eine Primzahl p lässt sich somit nicht durch $q(m)$ mit $m \in M$ darstellen: $p \neq q(m(k, l))$.

Gelingt es also eine natürliche Zahl n darzustellen als $n = m(k, l)$, dann ist $q(n)$ nicht prim, sondern hat wenigstens die zwei Faktoren $q(k)$ und $q(l)$, die ihrerseits nicht prim zu sein brauchen.

Findet man diesen **Nichtprimzahltest**, dann lässt sich durch rekursive Anwendung sofort die Primfaktorzerlegung von $q(n)$ finden. Einen einfachen Test zu finden, ob eine Zahl n von der Form $n = m(k, l)$ ist, ist mir bisher noch nicht gelungen und auch offenbar niemand anderem, dem ich diesen Ansatz bisher gezeigt habe.

Hier einige Eigenschaften von M :

M ist ein kommutativer multiplikativer Verband ohne Eins.

$$m(k, l+1) = m(k, l) + q(k)$$

$$m(k+1, l) = m(k, l) + q(l)$$

$$m(k+1, l+1) = m(k, l) + q(k) + q(l)$$

$$m(k, l) = m(k, k) + (l-k) \cdot q(k) = m(l, l) + (k-l) \cdot q(l), \text{ wenn } l > k$$

Diese Zusammenhänge zeigen eine eigenartige Verquickung der Indexmenge M mit der von ihr indizierten Menge Q , die sich ggf. für den Nichtprimzahltest evtl. in rekursiver Form nutzen lässt.

M stellt geometrisch eine zweidimensionale verwundene Fläche im dreidimensionalen Raum dar. Vielleicht lässt sich auch damit etwas anfangen.

$$m = m(k,l) = 2kl+k+l = k(2l+1)+l = l(2k+1)+k = k \cdot q(l)+l = l \cdot q(k)+k$$

Dies bedeutet:
Nur wenn

$$k = (m-l)/(2l+1) \in \mathbf{N}$$

bzw.

$$l = (m-k)/(2k+1) \in \mathbf{N}$$

dann ist $q(m)$ nichtprim.

Andersherum:

Wenn $(m-k)/(2k+1)$ bei einer gegebenen Zahl $m \in \mathbf{N}$ für alle Zahlen $k \in \mathbf{N}$ rational und nichtganz ist, dann ist $q(m)$ eine Primzahl. Für welche Zahlenpaare m und k ist das der Fall, wie hängen diese Zahlen zusammen? Oder noch mal anders: für ein gegebenes $m \in \mathbf{N}$, welche Eigenschaften muß $k \in \mathbf{N}$ haben, damit der Term rational bzw. nichtrational ist?

Zeigen die $m \in M$ besondere Eigenschaften unter Funktionen wie z.B. der L-Funktion?

	l					m(k,l)	= 2 kl	+ k	+ l					
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43
2	7	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72
3	10	17	24	31	38	45	52	59	66	73	80	87	94	101
4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130
5	16	27	38	49	60	71	82	93	104	115	126	137	148	159
6	19	32	45	58	71	84	97	110	123	136	149	162	175	188
7	22	37	52	67	82	97	112	127	142	157	172	187	202	217
8	25	42	59	76	93	110	127	144	161	178	195	212	229	246
9	28	47	66	85	104	123	142	161	180	199	218	237	256	275
10	31	52	73	94	115	136	157	178	199	220	241	262	283	304
11	34	57	80	103	126	149	172	195	218	241	264	287	310	333
12	37	62	87	112	137	162	187	212	237	262	287	312	337	362
13	40	67	94	121	148	175	202	229	256	283	310	337	364	391
14	43	72	101	130	159	188	217	246	275	304	333	362	391	m(k,l)

Wenn eine natürliche Zahl $n = m(k,l)$ ist, dann ist das eine Gleichung mit zwei Unbekannten, nämlich k und l . Gibt es eine zweite Gleichung für n und diese Unbekannten? Das ist also die Frage nach weiteren Eigenschaften der Zahlen $m(k,l)$.

Alternative aber äquivalente Darstellungen von $m(k,l)$ sind folgende:

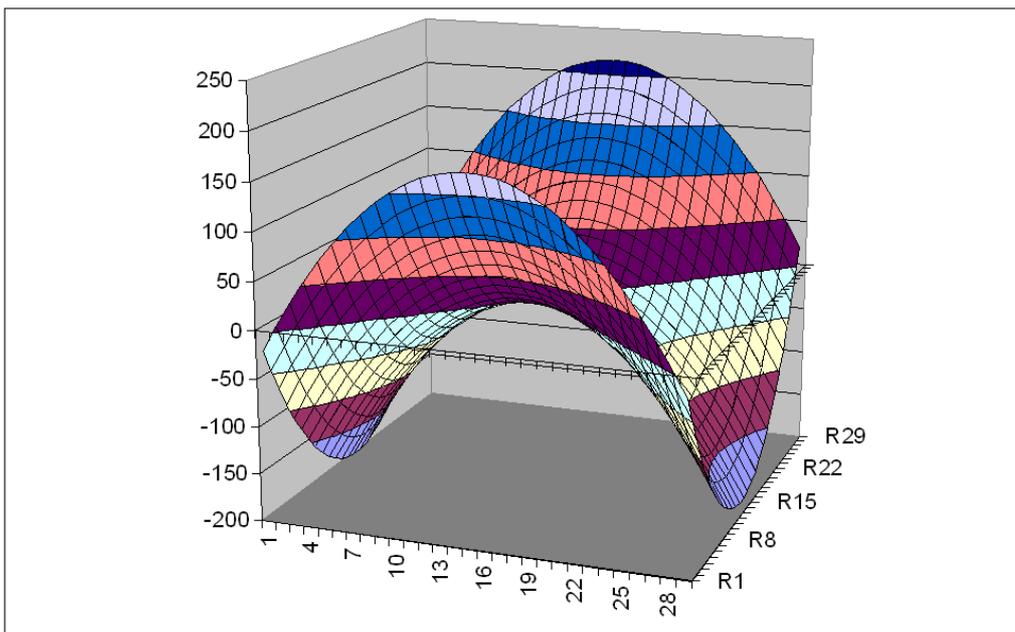
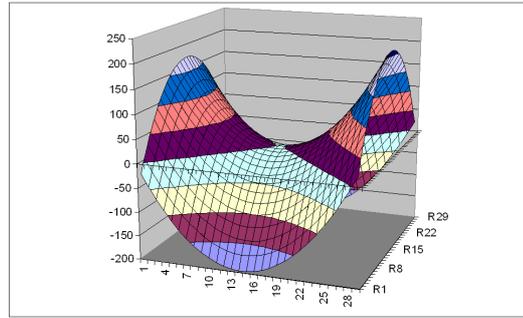
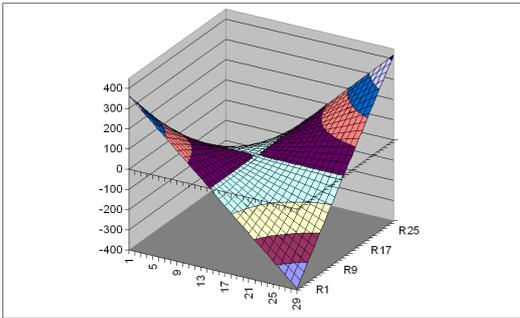
$$m(k,l) = 2x^2 + 2x(y+1) + y \quad \text{mit } k = x + y, l = x$$

$$m(k,l) = m(k,k+n) = 2k^2 + 2k(n+1) + n \quad \text{mit } l = k + n$$

$$m(k,k) = 2k^2 + 2k$$

Gedrehte Flächen ($\pm 45^\circ$):

$$m = \sqrt{2}x + x^2 - y^2 \quad \text{mit } x = k/\sqrt{2}, y = l/\sqrt{2} \text{ oder umgekehrt...}$$



```
'Primfaktoren einer Zahl, rekursiv bestimmt. QBasic-Programm
'Kapt.Wolf Scheuermann
'01.Feb.2018
```

```
DECLARE SUB MTest (q)
```

```
CONST FALSE = 0
CONST TRUE = NOT FALSE
```

```
CLS
PRINT
PRINT " Zu testende Zahl (maximal 8 Stellen - wegen der doofen Computerarithmetik):"
INPUT " q = ", q
PRINT
PRINT USING " ##### = "; q;
MTest q
PRINT
```

```
END
```

```

SUB MTest (q)
  IF q <= 1 THEN
    PRINT " "; q
    EXIT SUB
  ELSEIF q = 2 THEN
    PRINT q
    EXIT SUB
  ELSEIF q / 2 = INT(q / 2) THEN 'q gerade!
    PRINT " 2 *";
    MTest q / 2
    EXIT SUB
  END IF

  Flag = TRUE

  m = (q - 1) / 2
  k1 = (SQR(2 * m + 1) - 1) / 2
  INTk1 = INT(k1)

  IF Flag THEN
    FOR k = 1 TO INTk1 / 2
      k2 = INTk1 + 1 - k
      'von unten nach oben
      l = (m - k) / (2 * k + 1)
      IF l = INT(l) THEN
        mkl = 2 * k * l + k + 1
        PRINT 2 * k + 1; " *";
        Flag = FALSE
        MTest 2 * l + 1
        EXIT FOR
      END IF
      'von oben nach unten
      l = (m - k2) / (2 * k2 + 1)
      IF l = INT(l) THEN
        mkl = 2 * k2 * l + k2 + 1
        PRINT 2 * k2 + 1; " *";
        Flag = FALSE
        MTest 2 * l + 1
        EXIT FOR
      END IF
    NEXT
  END IF

  IF Flag THEN
    PRINT ; q
  END IF
END SUB

```

Ausgaben des Programms:

Zu testende Zahl (maximal 8 Stellen - wegen der doofen Computerarithmetik):
q = 11923193

11923193 = 3449 * 3457

Zu testende Zahl (maximal 8 Stellen - wegen der doofen Computerarithmetik):
q = 6753222

6753222 = 2 * 3 * 3 * 7 * 53597

Zu testende Zahl (maximal 8 Stellen - wegen der doofen Computerarithmetik):
q = 6723222

6723222 = 2 * 3 * 11 * 23 * 43 * 103

Zu testende Zahl (maximal 8 Stellen - wegen der doofen Computerarithmetik):
q = 5961596

5961596 = 2 * 2 * 59 * 25261